



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**CIFFU**

...

...

**Elementos de Teoría de Grupos**

...

**Olga Félix**

...

...

...

**Febrero 2018**

# Resumen

La teoría de grupos tiene un papel importante en el desarrollo de cualquier modelo en la física de partículas, en particular en lo que se refiere al Modelo Estándar y sus extensiones. Es por esto que consideramos importante incluir una revisión breve de los conceptos necesarios de teoría de grupos.

# Contenido I

## 1 Resumen

## 2 Teoría de grupos

## 3 Introducción

- Grupos y sus características
- Clases conjugadas
  - Operadores de Clase

## 4 Espacios vectoriales

- Espacio vectorial lineal
- Espacios linealmente independientes
- Vectores base
- Representaciones de los grupos
- Representaciones matriciales
- Espacios unitarios, producto escalar, matrices unitarias
- Representaciones unitarias
- Reducibilidad e irreducibilidad de las representaciones
- Caracteres
- Lemas de Schur
  - Primer Lema de Schur

## Contenido II

- Segundo Lema de Schur
- Producto directo de representaciones de un grupo
- Condiciones para la existencia de invariantes
- Proyectores

## 5 Referencias

# Clases conjugadas I

## Grupo

Un **grupo** es un conjunto de elementos  $a, b, c, \dots$  que cumplen con una ley de multiplicación definida para dichos elementos y que cumple con una serie de condiciones. Para este conjunto, el producto de dos elementos se puede denotar como sigue: sean  $a$  y  $b$  elementos de un conjunto  $G$ , su multiplicación es  $ab$ . Las condiciones que  $G$  debe cumplir para llamarlo grupo son:

- 1) El producto  $ab$  de cualquiera de dos elementos del conjunto  $G$  es un elemento de  $G$ .
- 2) Sean  $a, b, c \in G$ ; en el producto de estos elementos se tiene que

$$a(bc) = (ab)c = abc. \quad (1)$$

- 3) En  $G$  está contenido el elemento  $E$ , llamado elemento identidad, tal que

$$Ea = aE = a \quad \forall a \in G. \quad (2)$$

- 4) Para cada elemento  $a$  en el conjunto  $G$ , hay otro elemento también en  $G$  tal que

$$aa^{-1} = E \quad \text{y} \quad a^{-1}a = E, \quad (3)$$

este elemento  $a^{-1} \in G$  es llamado el inverso de  $a$ .

## Clases conjugadas II

Ahora, si  $ab = ba$  se dice que el grupo es **abeliano**, de otra forma se dice que el grupo es **no abeliano**.

### Inverso del producto

El inverso del producto  $ab$  de un grupo está dado por la relación

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \quad (4)$$

### Orden del grupo

El número de elementos de un grupo.

## Clases conjugadas III

### Grupos isomórficos

En general, diremos que dos grupos  $G$  y  $G'$  son isomórficos ( $G \approx G'$ ) si se puede establecer una correspondencia *uno a uno* entre sus elementos y además esta correspondencia se preserva bajo la multiplicación.

La *ley de multiplicación de un grupo*, puede ser representada convenientemente en la forma de una **tabla del grupo**, etiquetando con los elementos del grupo las columnas y filas de un arreglo cuadrado.

El estudio de la estructura de los grupos se simplifica cuando se consideran relacionados como elementos de una clase, con propiedades similares.

Para definir una **clase** requerimos del concepto de **elemento conjugado**.

## Clases conjugadas IV

### Elemento conjugado

Se dice que un elemento  $b$  del grupo  $G$  es *conjugado* al elemento  $a$ , si podemos encontrar un elemento  $u \in G$  tal que

$$uau^{-1} = b. \quad (5)$$

Además, si  $b$  y  $c$  son ambos conjugados a  $a$ , entonces  $b$  y  $c$  son ambos conjugados entre sí.

### Clase

Se define una **clase** como un conjunto de elementos del grupo que son conjugados entre sí. Además, cada elemento del grupo pertenece a una clase.

## Clases conjugadas V

La unidad forma una clase por sí misma.

En un grupo abeliano cada elemento está en una y solamente una clase.

Con lo anterior, se tiene una relación entre elementos que cumple con todos los requerimientos para una relación de equivalencia (símbolo  $\equiv$ ).

### Relación de equivalencia (símbolo $\equiv$ )

Sean  $a, b, c \in G$ ; si  $a \equiv a$  y  $a \equiv b$  entonces  $a \equiv b$  si  $a \equiv b$  y  $b \equiv c$  entonces  $a \equiv c$ .

Una relación de equivalencia puede usarse para separar un conjunto en clases.

En el caso de clases conjugadas, se separará en clases de elementos que son conjugados unos con otros.

Sea  $K$  una clase del grupo  $G$ , entonces

$$K = \{a, b \mid u \in G, uau^{-1} = b\}. \quad (6)$$

## Propiedades de las clases

Sean  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) las clases en el grupo  $G$ ; entonces se cumple que

$$i) \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$ii) \quad \bigcup_i K_i = G.$$

Además, todos los elementos en una misma clase tienen el mismo orden<sup>1</sup>.

La suma de los elementos de un grupo  $G$  correspondientes a una misma clase es llamada *operador de clase*. Suponiendo que la  $i$ -ésima clase tiene  $g_i$  elementos  $R_1, R_2, \dots, R_{g_i}$ , el operador de clase  $C_i$  se define como:

$$C_i = \sum_{l=1}^{g_i} R_l^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

# Condiciones para la existencia de invariantes I

En la aplicación de la teoría de grupos al estudio de simetrías, no se está interesado en la estructura del grupo o grupos propiamente, sino en las transformaciones o cambios que son producidos por los elementos del grupo en varios elementos u objetos. Tales objetos serán generalmente las coordenadas de los constituyentes de algún sistema físico.

Es posible describir estos objetos como vectores en algún espacio.

El concepto de vector es algo muy general. El concepto de espacio vectorial puede ser extendido a un conjunto de funciones, aunque esto signifique que se tenga una dimensionalidad infinita.

## Condiciones para la existencia de invariantes II

### Espacio vectorial

Un espacio vectorial lineal  $L$  se define como un conjunto de elementos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ , de tal forma que al multiplicarlos por un número complejo o sumar unos con otros, el resultado es un elemento del mismo conjunto, además si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  están en  $L$ , entonces

$$1) (\alpha + \beta) \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}.$$

$$2) (\alpha\beta) \mathbf{x} = \alpha(\beta \mathbf{x}).$$

$$3) E\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

$$4) \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}.$$

5) El espacio  $L$ , debe contener un vector nulo,  $\mathbf{0}$ , tal que

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}.$$

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son reales, entonces se dice que el espacio vectorial es real. Hay un número infinito de miembros en cualquiera de esos espacios vectoriales y ellos son llamados vectores.

# Condiciones para la existencia de invariantes III

## Independencia lineal

Los vectores  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_p$  se dicen linealmente independientes si no se encuentran relacionados por una ecuación del tipo

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{x}_k = 0 \quad \forall \alpha_k \neq 0.$$

## Vectores base

En un espacio  $L_n$  de dimensión  $n$ , cualquier colección de  $n$  vectores linealmente independientes forman un conjunto de *vectores base* en  $L_n$  ( $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), de tal forma que cualquier vector  $\mathbf{x} \in L_n$  se puede expresar como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

## Condiciones para la existencia de invariantes IV

La ortogonalidad es un concepto bien entendido en el espacio tridimensional, extendemos este concepto al espacio vectorial abstracto. Esto puede ser hecho a través de una definición general del producto escalar o producto interno.

Se conjuntan dos ideas o elementos: teoría de grupos y espacios vectoriales. Se examina la asociación entre los elementos de un grupo y transformaciones en un espacio vectorial.

### Homomorfismo

Si hay un homomorfismo de algún grupo  $G$  sobre un conjunto de matrices  $D(G)$  en un espacio vectorial  $L$  de  $n$  dimensiones, entonces  $D(G)$  es llamado una representación del grupo  $G$  en el espacio de representación  $L$ .

## Condiciones para la existencia de invariantes $V$

Así, a cualquier elemento  $R \in G$  le corresponde una matriz  $D(R)$  de orden  $(n \times n)$  en el espacio vectorial  $L$ , tal que al producto de dos elementos  $R_1, R_2 \in G$ , le corresponde el producto de las matrices  $D(R_1)$  y  $D(R_2)$ . Así,

$$D(R_1 R_2) = D(R_1) D(R_2).$$

Para cualquier grupo se tiene la llamada representación trivial, que es cuando la matriz unitaria corresponde a todos los elementos del grupo  $G$ .

### Representación fiel

Una representación es llamada *fiel* si la relación entre  $G$  y  $D(G)$  es isomórfica.

# Condiciones para la existencia de invariantes VI

## Representaciones equivalentes

Dos representaciones  $D(G)$  y  $D'(G)$  en el mismo espacio vectorial  $L$  se dice que son equivalentes si para cualquier par  $D(R)$  y  $D'(R)$ , donde  $R \in G$ , se tiene que:

$$D'(R) = U^{-1}D(R)U.$$

Esto debe ser verdad para todo  $R \in G$ , siempre con la misma matriz  $U$ . En general, no estaremos interesados en representaciones equivalentes, puesto que éstas sólo difieren por un cambio de base en  $L$ .

Un grupo  $G$  puede tener muchas representaciones diferentes.

Distinguiremos estas representaciones por una etiqueta. Así,  $D^{(\mu)}(R)$  es la matriz correspondiente a  $R$  en la representación  $\mu$ .

En las teorías cuánticas, se asocian valores numéricos con pares de vectores (*vectores de estado*). Con el fin de poner en contacto la teoría de representaciones con la física, se define una métrica en el espacio  $L$ ,  $n$ -dimensional.

Para esto, asociamos con cada par de vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  un número complejo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

# Condiciones para la existencia de invariantes VII

## Producto escalar

El número complejo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es llamado el producto escalar de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , se requiere que satisfaga las siguientes condiciones:

- ①  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})^*$  ;
- ②  $(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ;
- ③  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$  ;
- ④  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ , donde la igualdad se cumple sólo si  $\mathbf{x} = 0$ .

## Espacio unitario

Un espacio  $L$  en el cual está definido un producto escalar, se conoce como espacio unitario.

## Condiciones para la existencia de invariantes VIII

### Matriz hermítica

Se dice que una matriz  $\mathbf{A}$  que es idéntica con su adjunta, es *hermítica*, esto es,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger,$$

donde  $\mathbf{A}^\dagger$  es la adjunta de  $\mathbf{A}$ .

### Matriz unitaria

Se dice que una matriz  $\mathbf{A}$  es unitaria si

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}.$$

# Condiciones para la existencia de invariantes IX

## Representación unitaria

Si las matrices de la representación de un grupo  $G$  son unitarias, entonces la representación es llamada *representación unitaria*, hemos visto que existen infinitas representaciones del grupo  $G$ , equivalentes a alguna representación dada  $D(G)$ .

Debido a que las matrices unitarias tienen propiedades especialmente útiles, es importante determinar si alguna representación  $D(G)$  es equivalente a una representación unitaria.

Para *grupos finitos* se puede probar que *cada representación es equivalente a una representación unitaria*, de tal forma que para grupos finitos siempre podemos elegir una representación unitaria.

En general, sí podemos encontrar una base en la cual todas las matrices  $D(R)$  de una representación  $n$ -dimensional pueden ser expresadas en la forma

$$D(R) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(R) & A(R) \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

# Condiciones para la existencia de invariantes X

## Representación reducible

Las  $D^{(2)}(R)$  son matrices de orden  $(n - m) \times (n - m)$ ,  $A(R)$  es una matriz rectangular con  $m$  filas y  $(n - m)$  columnas, y  $0$  denota una matriz con  $(n - m)$  filas y  $m$  columnas, para la cual todos sus elementos son cero. Entonces decimos que la representación  $D(R)$  es reducible.

Es posible encontrar una base para la cual  $A(R) = 0$ , esto es

$$D(R) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(R) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

entonces decimos que la representación es completamente reducible.

Podemos dar un criterio intrínseco de reducibilidad como sigue: consideramos aquellos vectores que están en el espacio  $m$ -dimensional de las primeras  $m$  componentes.

## Condiciones para la existencia de invariantes XI

La matriz (9) aplicada a estos vectores da

$$\begin{bmatrix} D^{(1)}(R) & A(R) \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{(1)}(R) \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Vemos que el subespacio de las primeras  $m$  componentes es invariante, mientras que el subespacio complementario de dimensión  $(n - m)$  no es invariante:

$$\begin{bmatrix} D^{(1)}(R) & A(R) \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(R) \mathbf{x} \\ D^{(2)}(R) \mathbf{x} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

En general, si existe algún subespacio de dimensión  $m \leq n$  que es invariante bajo todas las transformaciones del grupo, la representación es reducible y si no hay un subespacio propio que sea invariante, entonces la representación es irreducible.

# Condiciones para la existencia de invariantes XII

## Representación reducible

El espacio  $L$  es descompuesto en la suma directa de  $L^{(1)}$  y  $L^{(2)}$ ,

$$L = L^{(1)} \oplus L^{(2)},$$

y la representación  $D$  es la suma de  $D^{(1)}$  y  $D^{(2)}$ ,

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}.$$

Si  $D^{(1)}$  y  $D^{(2)}$  son reducibles, realizamos el mismo procedimiento para seguir reduciendo las matrices resultantes, de forma que al final podremos escribir una representación  $D(R)$  como

$$D^{(1)} \oplus \dots \oplus D^{(k)}.$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XIII

Representaciones irreducibles equivalentes no se cuentan como distintas y podemos usar el mismo símbolo para ellas, así que la representación  $D(R)$  puede contener una representación irreducible  $D^{(\nu)}$  varias veces. Expresamos esto simbólicamente como

$$D(R) = \sum_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)}, \quad (12)$$

donde los  $a_{\nu}$  son enteros positivos y nos indican el número de veces que  $D^{(\nu)}$  aparece en la descomposición de  $D(R)$ , en la siguiente sección se presenta una expresión que nos permite obtener  $a_{\nu}$  en términos de los caracteres del grupo.

## Condiciones para la existencia de invariantes XIV

En esta sección se introduce un concepto de teoría de grupos que tiene muchas aplicaciones. Describe las principales propiedades de las representaciones y por lo tanto es llamado caracter del grupo. Este concepto resuelve el problema de cómo describir la propiedades invariantes de la representación de un grupo de manera simple.

Una posibilidad para la descripción de las propiedades invariantes podría ser el uso de los eigenvalores de la representación matricial, los cuales no cambian bajo una transformación de similaridad, pero afortunadamente en algunos casos es suficiente usar una cantidad invariante más simple, llamada la traza de la representación matricial

### Traza de la representación matricial

$$\chi(R) = \sum_{i=1}^d D_{ii}(R), \quad (13)$$

donde  $d$  es la dimensión de la representación matricial y  $\chi(R)$  es llamado el caracter del grupo. Debido a nuestros intereses nos restringiremos sólo a grupos finitos, por el momento.

## Condiciones para la existencia de invariantes XV

Algunos resultados útiles referentes a los caracteres de grupo se enlistan a continuación:

- ➊ Todos los elementos de una clase dada en  $G$  tienen el mismo caracter.
- ➋ El número de representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo es igual al número de clases en el grupo.
- ➌ Consideremos una representación reducible  $D(R)$ , los caracteres de grupo nos pueden ayudar a descomponer esta representación, para un elemento  $R$  en la clase  $K_i$  del grupo  $G$ , tenemos

$$\chi_i = \sum_{\nu} a_{\nu} \chi_i^{(\nu)},$$

donde al caracter  $\chi_i$  de la representación reducible  $D(R)$  se le conoce como caracter compuesto, a los caracteres  $\chi_i^{(\nu)}$  de las representaciones irreducibles  $D^{(\nu)}(R)$  se les llama caracteres primitivos.

- ➍ Los  $a_{\nu}$  se determinan mediante la expresión

$$a_{\nu} = \frac{1}{g} \sum_i c_i \chi_i^{(\nu)*} \chi_i, \quad (14)$$

donde  $g$  es el orden del grupo y  $c_i$  es el número de elementos en la clase  $K_i$ .

## Condiciones para la existencia de invariantes XVI

- 5 Conociendo los caracteres de una representación podemos determinar cuándo una representación es irreducible o no, existe una condición suficiente que nos permite hacer esto:

$$\sum_i c_i |\chi_i|^2 = g. \quad (15)$$

Si esta igualdad se cumple, entonces se dice que la representación en cuestión es irreducible.

- 6 La dimensión de cada una de las representaciones irreducibles de un grupo se puede obtener mediante la expresión:

$$\sum_{\nu} n_{\nu}^2 = g, \quad (16)$$

donde evidentemente  $n_{\nu}$  representa la dimensión de la representación  $D^{\nu}(R)$ .

## Condiciones para la existencia de invariantes XVII

### Primer Lema de Schur

Sea  $D(R)$  una representación irreducible del grupo  $G$ , definido en el espacio vectorial  $L$ , y sea  $A$  un operador fijo en  $L$ . El primer lema de Schur establece que:

Si

$$[A, D(R)] = 0,$$

entonces  $A$  es proporcional al operador identidad, esto es

$$A = \lambda I.$$

### Segundo Lema de Schur

Sean  $D^{(1)}(R)$  y  $D^{(2)}(R)$  dos representaciones irreducibles no equivalentes del grupo  $G$  en los espacios  $L_1$  y  $L_2$  con dimensiones  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente; y sea  $A$  un operador el cual mapea de  $L_1$  a  $L_2$ . El segundo lema de Schur establece que:

Si

$$D^{(1)}(R) A = A D^{(2)}(R), \quad \forall R \in G,$$

entonces  $A$  es el operador cero ( $A = 0$ ).

## Condiciones para la existencia de invariantes XVIII

Podemos construir una representación  $D(G)$  de un grupo  $G$  a partir de dos representaciones irreducibles del mismo grupo, digamos  $D^{(1)}(R)$  y  $D^{(2)}(R)$ , esto es,

$$D(R) = D^{(1)}(R) \otimes D^{(2)}(R). \quad (17)$$

El tipo de representación formada mediante la ecuación (17) es en general una representación reducible, lo cual es obvio, en vista de que el número total de distintas representaciones irreducibles está limitado para cualquier grupo  $G$ . Los caracteres de esta representación se obtienen tomando el producto de los caracteres de cada una de las representaciones irreducibles que la componen. Por ejemplo, para el caso de la ecuación (17) tenemos

$$\chi(R) = \chi^{(1)}(R)\chi^{(2)}(R). \quad (18)$$

Entonces, si formamos una nueva representación  $nm$ -dimensional, ésta puede ser en general reducida a una suma de representaciones irreducibles, escribimos ésto de la siguiente forma:

$$D^{(i)} \otimes D^{(j)} = \sum_k a_{ijk} D^{(k)}, \quad (19)$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XIX

donde  $a_{ijk}$  es un número entero que nos indica el número de veces que la representación  $D^{(k)}$  aparece en la ecuación (19). Podemos encontrar los coeficientes  $a_{ijk}$  mediante la expresión

$$a_{ijk} = \frac{1}{g} \sum_l c_l \chi^{(i)}(K_l) \chi^{(j)}(K_l) \chi^{(k)}(K_l)^*, \quad (20)$$

donde la suma es sobre todas las clases  $K_l$  del grupo y  $c_l$  es el número de elementos en cada clase.

Si la representación irreducible  $D(R)$  es unitaria, el producto escalar de vectores en el espacio de Hilbert<sup>2</sup> de la representación es invariante, ya que

$$(D\mathbf{y}, D\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, D^\dagger D\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Más aún, en este caso el producto escalar nos provee de un invariante Hermítico.

Si la adjunta de la representación  $\bar{D}$  y la compleja conjugada de la representación  $D^*$  son equivalentes, esto es, si

$$\bar{D}^{-1}(R) \approx D^*(R)$$

o

$$D(R) \approx D^{\dagger -1}(R),$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XX

existe una matriz  $F$  tal que

$$D^\dagger(R) F D(R) = F,$$

entonces

$$(\mathbf{y}, F\mathbf{x}),$$

que es un invariante bajo todas las transformaciones del grupo  $G$ , esto es:

$$(D\mathbf{y}, FD\mathbf{x}) = (D\mathbf{y}, D^\dagger F D\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, F\mathbf{x}).$$

Vemos que

$$D^\dagger(R) F^\dagger D(R) = F^\dagger,$$

de tal forma que

$$(\mathbf{y}, F^\dagger \mathbf{x})$$

también es invariante. Combinando los resultados anteriores encontramos dos invariantes Hermíticos, a saber:

$$\left(\mathbf{y}, \frac{F + F^\dagger}{2} \mathbf{x}\right), \quad \left(\mathbf{y}, \frac{F - F^\dagger}{2i} \mathbf{x}\right).$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XXI

Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para la existencia de un invariante Hermítico es la equivalencia de  $\bar{D}$  y  $D^*$ .

Hemos visto que si  $\bar{D}$  y  $D^*$  no son equivalentes, entonces no podemos construir un invariante Hermítico. Sin embargo, se puede mostrar que lo podemos hacer si tomamos la suma directa de  $D$  y  $D^{\dagger-1}$ , las cantidades invariantes obtenidas son:

$$A = \frac{1}{2} (y^\dagger x + x^\dagger y),$$

$$B = \frac{1}{2} (y^\dagger x - x^\dagger y),$$

donde  $x$  es el espacio sobre el cual actúa  $D$  y  $y$  el espacio sobre el cual actúa  $D^{\dagger-1}$  (ambos espacios con dimensión  $n$ ). Tomando la suma directa de los dos espacios formamos vectores de  $2n$  componentes, esto es;

$$\psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XXII

que bajo una transformación del grupo  $G$  queda como

$$\psi' = \begin{pmatrix} Dx \\ D^{\dagger-1}y \end{pmatrix}.$$

Las dos matrices hermíticas

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $E$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ , nos proveen de dos invariantes Hermíticos:

$$\phi^{\dagger} f_1 \psi = (\phi, f_1 \psi) \quad \text{y} \quad \phi^{\dagger} f_2 \psi = (\phi, f_2 \psi).$$

Empezaremos esta sección con el hecho de que, partiendo con cualquier función  $\psi$ , podemos obtener una representación del grupo  $G$ , aplicando a  $\psi$  todas las transformaciones del grupo  $G$ . Entonces la función  $\psi$  puede ser expresada como una suma de funciones que pueden actuar como base de las diferentes representaciones irreducibles:

$$\psi = \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{n_{\nu}} \psi_i^{(\nu)}. \quad (21)$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XXIII

Se dice que la función  $\psi_i^{(\nu)}$  corresponde al  $i$ -ésimo renglón de la  $\nu$ -ésima representación irreducible del grupo  $G$ . Nos preguntamos cómo encontrar las funciones  $\psi_i^{(\nu)}$  si conocemos de antemano  $\psi$ .

Para responder a esta pregunta se parte de la siguiente ecuación:

$$\sum_R D_{ii}^{(\mu)*}(R) O_R \psi_i^{(\nu)} = \frac{g}{n_\mu} \psi_i^{(\nu)} \delta_{ii} \delta_{\mu\nu}, \quad (22)$$

donde la forma en que actúa  $O_R$  sobre  $\psi(x)$  es

$$O_R \psi(x) = \psi(R^{-1}x) \quad \forall x.$$

Se define entonces un operador de proyección como

$$P_i^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R D_{ii}^{(\mu)*}(R) O_R,$$

de tal forma que

$$P_i^{(\mu)} \psi_j^{(\nu)} = \psi_i^{(\mu)} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}.$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XXIV

Así, si aplicamos  $P_i^\mu$  a la ecuación (21), obtenemos el resultado

$$\psi_i^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R D_{ii}^{(\mu)*}(R) O_R \psi.$$

En forma análoga, decimos que una función corresponde a la  $\nu$ -ésima representación irreducible de  $G$ , si es una suma de funciones correspondientes a las diferentes columnas de la representación, esto es,

$$\psi^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{\nu_\nu} \psi_i^{(\nu)}. \quad (23)$$

Si sumamos sobre  $i$  en la ecuación (22), obtenemos

$$\sum_R \chi^{(\mu)*}(R) O_R \psi_i^{(\nu)} = \frac{g}{n_\mu} \psi_j^{(\nu)} \delta_{\mu\nu}, \quad (24)$$

y sumando sobre  $i$  de 1 a  $n_\nu$  (usando (23)), tenemos

$$\sum_R \chi^{(\mu)*}(R) O_R \psi^{(\nu)} = \frac{g}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \psi^{(\nu)}. \quad (25)$$

## Condiciones para la existencia de invariantes XXV

Vemos que

$$P^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R \chi^{(\mu)*}(R) O_R \quad (26)$$

es un operador de proyección, es decir,

$$P^{(\mu)} \psi^{(\nu)} = \psi^{(\mu)} \delta_{\mu\nu}. \quad (27)$$

Por último de (21) y (23)

$$\psi = \sum_\nu \psi^{(\nu)}, \quad (28)$$

donde

$$\psi^{(\nu)} = P^{(\nu)} \psi. \quad (29)$$

Es importante mencionar que los operadores de proyección se pueden obtener de manera equivalente mediante la expresión

$$P^\nu = \frac{n_\nu}{g} \sum_i \chi^{(\nu)*} C_i, \quad (30)$$

donde los  $C_i$  son los operadores de clase.

Además, los operadores de proyección asociados a un grupo  $G$  cumplen con:

## Condiciones para la existencia de invariantes XXVI

$$① \quad P^\nu P^\mu = \delta_{\nu\mu},$$

$$② \quad \sum_\nu P^\nu = E \text{ (} E \text{ es el elemento identidad del grupo).}$$

se hace uso de estos conceptos, con el fin de obtener las funciones que corresponden a las representaciones irreducibles de los grupos  $(S_3)$  y  $(A_4)$ , respectivamente.

---

<sup>2</sup>Un espacio de Hilbert es un espacio de producto interno que es completo con respecto a la norma definida usando el producto interno ( $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ ). Se les dio el nombre después de que David Hilbert, convirtiera esta idea a través de sus estudios de ecuaciones integrales.

# Referencias I



M. Hamermesh, *Group Theory And Its Application To Physical Problems*, Dover Publications, Inc., New York, 2003.



K. N. Srinivasa Rao, *Linear Algebra And Group Theory For Physicists*, Jhon Wiley And Sons, Inc., New York, 1996.



W. Greiner, B. Müller, *Quantum Mechanics (Symmetries)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.



Jin-Quan Chen, *Group Representation Theory for Physicists*, World Scientific, 1989.



B. Baumslag, B. Chandler, *Theory and Problems of Group Theory*, McGraw Hill Company, 1968.