

INTRODUCCIÓN A LA COSMOLOGÍA MODERNA

**Ana A. Avilez López
(FM6-308)**

CIFFU

**Cuerpo Académico: Nueva Física en
Aceleradores y el Cosmos.**

FCFM-BUAP

BLOQUE 1: MODELO COSMOLOGICO ESTÁNDAR

- **COSMOLOGÍA DE FONDO**
 - Universo de Friedmann-Robertsson-Walker
Con contenido material tipo LCDM
- **Medidas de Distancia y Horizontes**
- **INCONSISTENCIAS**
- **MODELO DE INFLACIÓN DE FONDO**

HERRAMIENTAS NUMÉRICAS:

CLASS
ALTER-BBN
MULTIMODE-CODE

BLOQUE 2: COSMOLOGIA FISICA E HISTORIA TÉRMICA DEL UNIVERSO.

- Ecuación de Boltzmann
 - Recombinacion
 - BBN nucleosíntesis
- Decaimiento de materia oscura

BLOQUE 3: TEORÍA DE PERTURBACIONES COSMOLOGICAS

- **UNIVERSO DE FRW PERTURBADO EN LAS NORMAS DE NEWTON Y SINCRONA**
- **PERTURBACIONES DE MATERIA**
 - Formación de estructura
 - Oscilaciones acústicas
 - CMB
- **ORIGEN DE LAS PERTURBACIONES**
 - A PARTIR DE INFLACIÓN

REFERENCIAS: BLOQUE 1

- INTRODUCTION TO MODERN COSMOLOGY
Scott Dodelson
- AN INTRODUCTION TO MODERN COSMOLOGY
Andrew Liddle
- GRAVITATION AND COSMOLOGY
Stephen Weinberg
- PHYSICAL FOUNDATIONS OF COSMOLOGY
V. Mukhanov
- NI IDEA: GRANDES MISTERIOS DEL UNIVERSO
Jorge Cham y Daniel Whiteson.

MODELO COSMOLÓGICO ESTANDARD

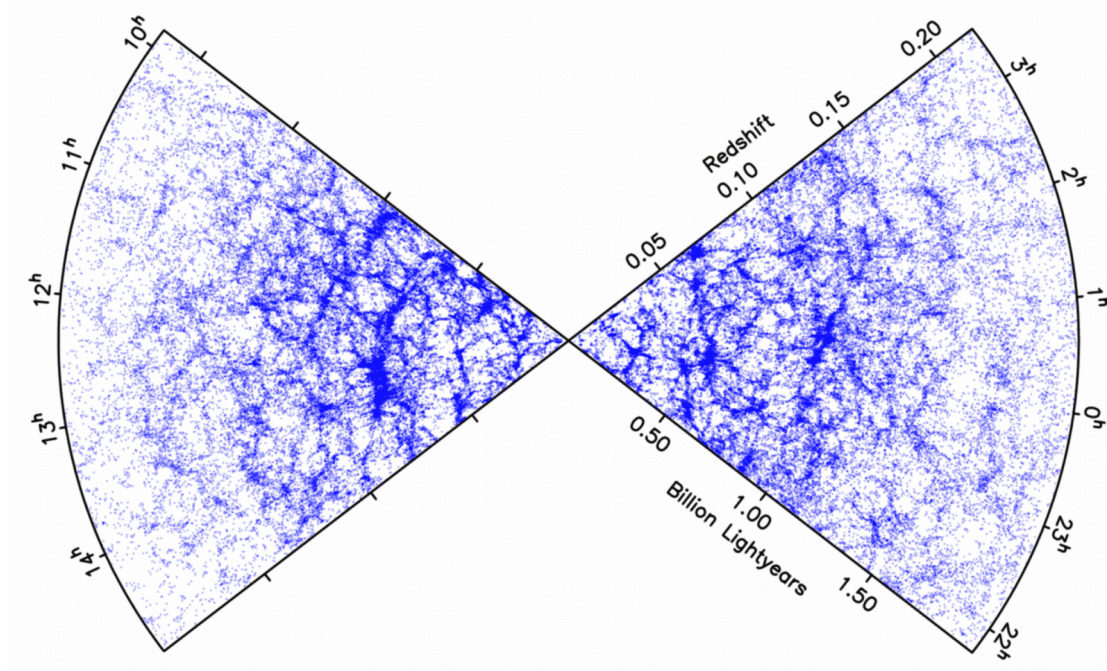
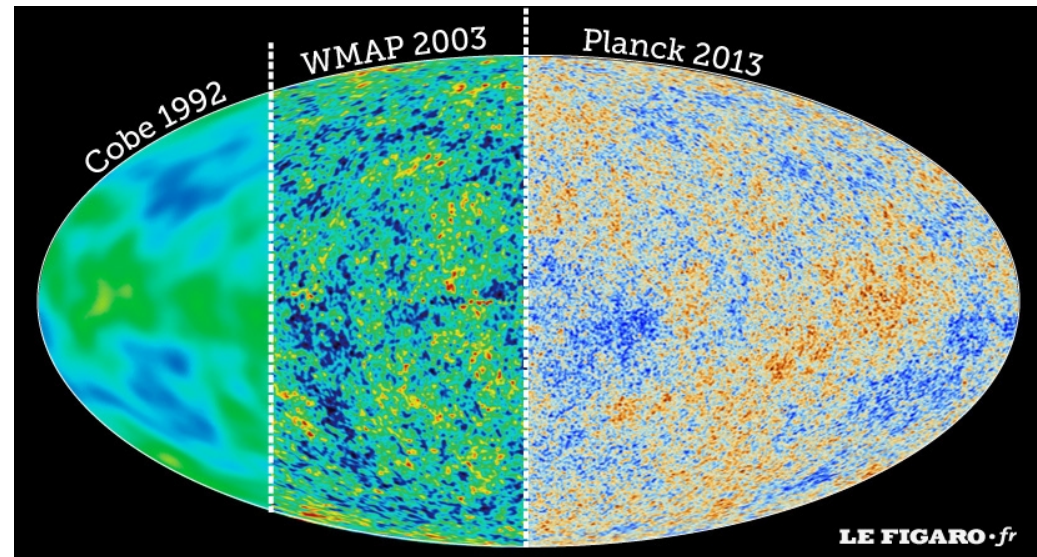
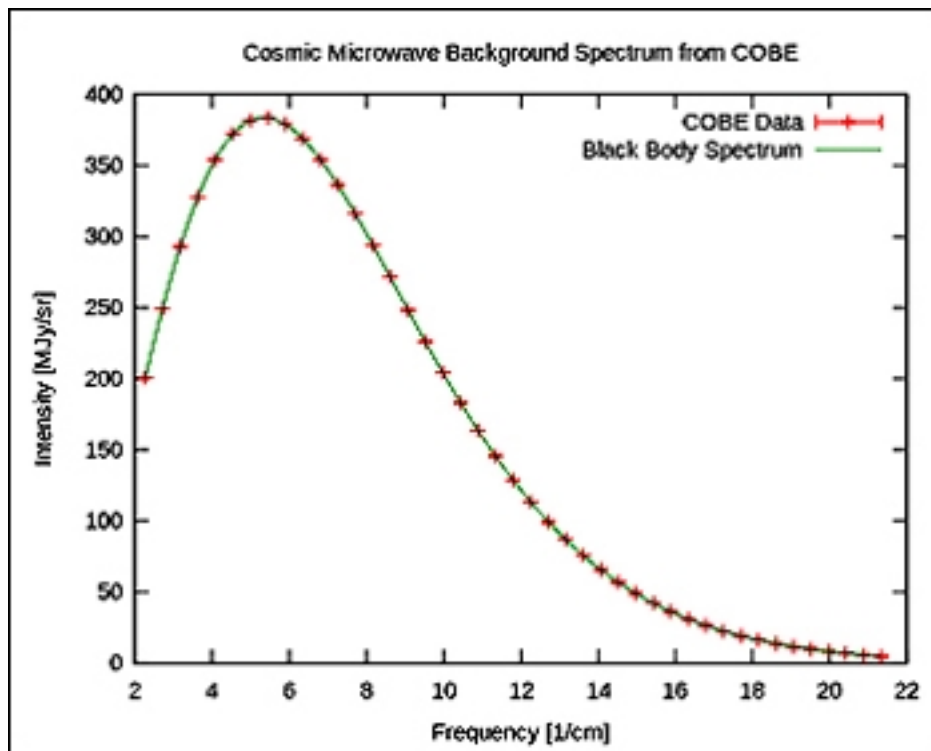
Evidencias observacionales

Resultados Clave de la Relatividad General en un espacio homogéneo e isotrópico.

Propagación de la Luz y Corrimiento al Rojo

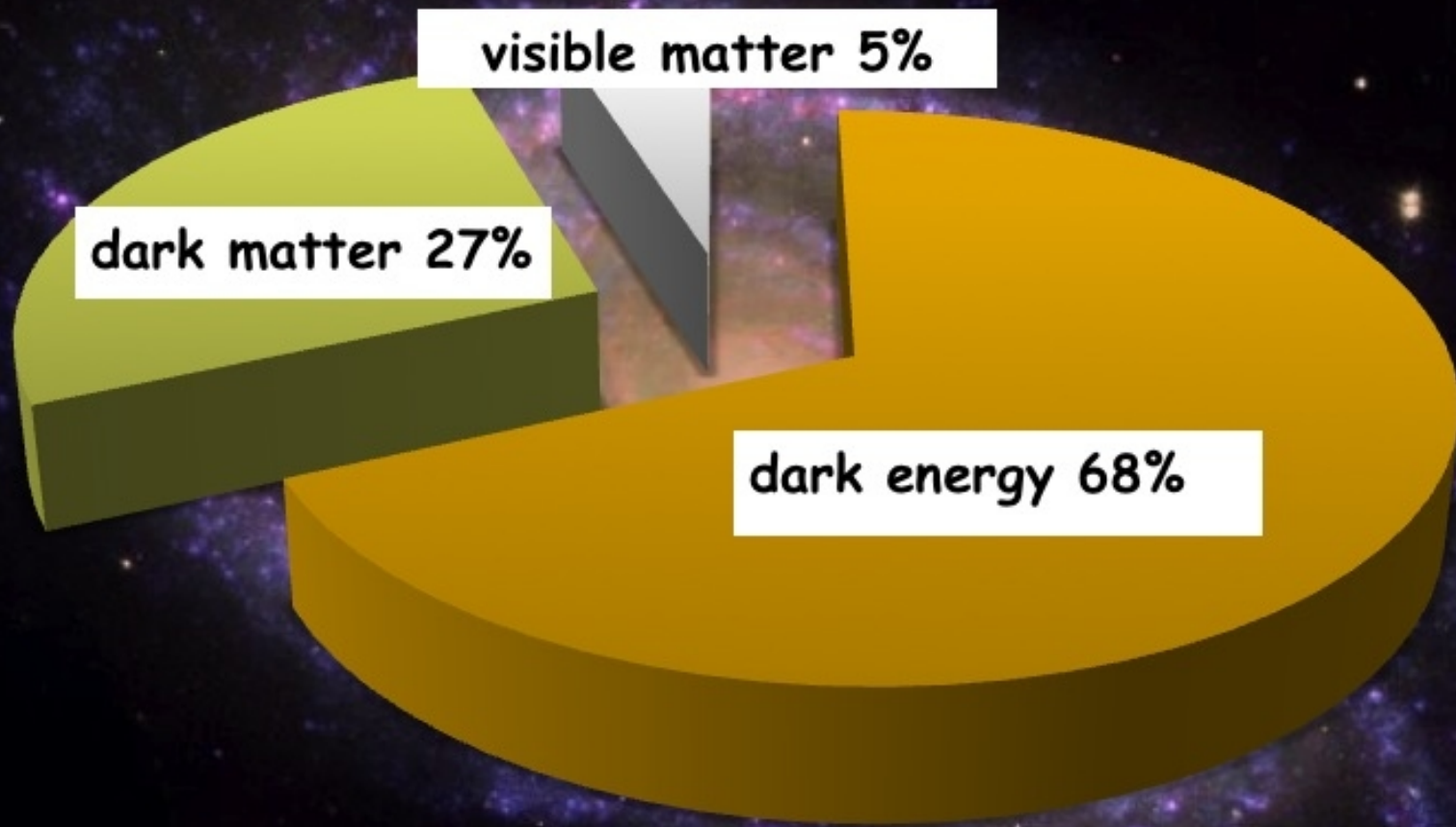
Ecuaciones de Einstein y La Evolución de la Energía

Horizontes y Distancias en Cosmología





Universe content

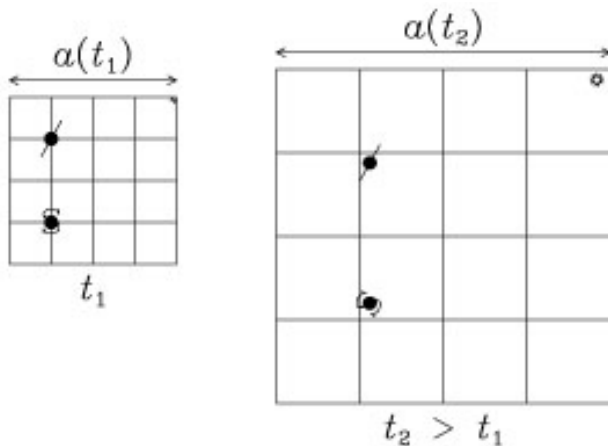


1. Evidencias Observacionales sobre el universo

- El parche observable ~ 3000 Mpc
- Distribución de la materia homogénea e isotrópica arriba de 100 Mpc
- Se expande de acuerdo a la ley de Hubble aunque lo hace aceleradamente en el presente.
- Está rodeado de un baño térmico de radiación en la longitud de onda de microondas con $T \sim 2.725$ K
- Contiene una pequeña fracción de bariones:
1 barion por cada 10^9 fotones. 75% Hidrogeno 25% Helio
- Fluctuaciones del CMB indican que cuando el universo era 1000 más pequeño de lo que es ahora, las fluctuaciones de la densidad de energía eran de orden de 10^{-5} en comparación con el promedio

GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE FRW

- Métrica: distancia entre dos puntos
- Expansión uniforme en espacio plano: todas las separaciones entre partículas se escalan (en promedio) en proporción con el factor de escala
- Coordenadas comoviles (x,y,z) → ancladas a la expansión



$$ds^2 = \sum_{\mu\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{bmatrix}$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$(\text{intervalo invariante})^2 = -(\text{intervalo de tiempo})^2 + (\text{factor de escala})^2(\text{intervalo comovil})^2$$

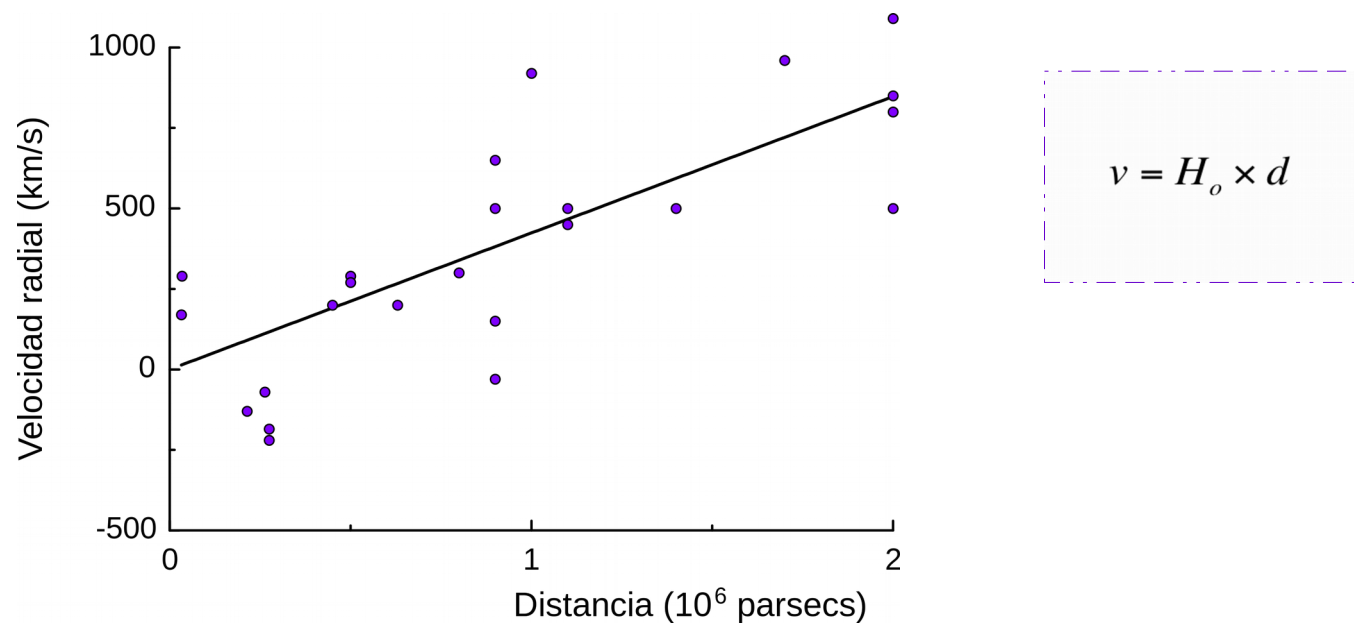
$$r(t) = a(t)x(t) \quad \rightarrow \quad v(t) = H(t)r(t) + a(t)\dot{x}(t).$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\dot{x} \rightarrow 0 \quad v(t) = H(t)r(t) \quad \text{Ley de Hubble}$$

$$H_0 = H(t_0) \sim 100h \, km \, s^{-1} Mpc^{-1} \quad h \sim 0.72,$$

$$a(t_0) = 1 \quad \text{Distancia actual} = \text{Distancia comovil}$$



- Generalización a espacio curvo (en un universo homogéneo e isotrópico)
- No hay posiciones preferenciales (principio cosmológico) → curvatura espacial constante

En coordenadas espaciales esféricas, la métrica más general es (Friedmann-Robertson-Walker):

$$ds_3^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) = a^2(d\chi^2 + S_k(\chi)d\Omega^2),$$

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2}, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

K	S_3	$S_K(\chi)$
1	esférica	$\sin(\chi)$
0	plana	χ
-1	hiperbólica	$\sinh(\chi)$

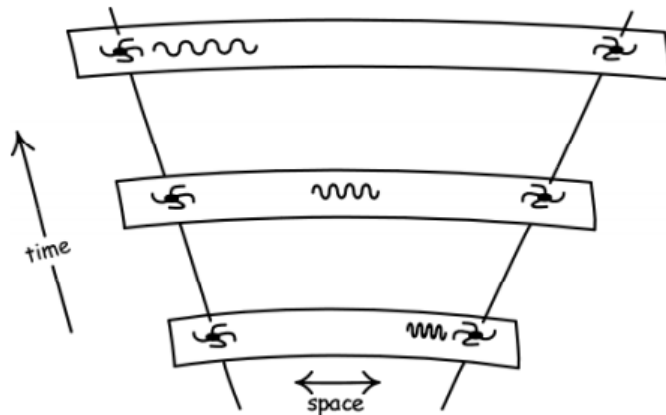
Corrimiento al Rojo: medida de distancia

- La luz viaja en geodésicas nulas, es decir

$$\int d\chi = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = c \int \frac{dt}{a(t)}$$

$$1 + z \equiv \frac{\Delta t_{obs}}{\Delta t_{emit}} = \frac{\nu_{emit}}{\nu_{obs}} = \frac{a_{obs}}{a_{emit}}$$

TAREA: DEMOSTRAR PARA UN PERIODO DE OSCILACION DE UNA ONDA EM CLASICA.



ECUACIONES DE EINSTEIN

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right],$$

TAREA: Encontrar los siguientes símbolos de Christoffel para la métrica de FRW

$$\Gamma_{00}^0 = 0$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} a' a$$

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \delta_{ij} \frac{a'}{a}$$

Solo dos conjuntos de componentes del tensor de Ricci diferentes de cero:

$$\mu = \nu = 0$$

$$\mu = \nu = i$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta}, \quad R_{ij} = \Gamma_{ij,0}^0 + \Gamma_{0k}^k\Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{ki}^0\Gamma_{j0}^k - \Gamma_{0i}^k\Gamma_{jk}^0,$$

$$R_{00} = -\Gamma_{0i,0}^i - \Gamma_{j0}^j\Gamma_{0i}^j,$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} [2a'^2 + aa''].$$

$$= -\delta_{ii} \left(\frac{a'}{a} \right)' - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij}, \quad , \quad i$$

$$= -3 \left[\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] - 3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2$$

$$= -3 \frac{a''}{a}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$= -R_{00} + \frac{1}{a^2} R_{ii}$$

$$= 6 \left[\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right],$$

TAREA: Encontrar las componentes del tensor de Riemann para la metrica de FRW

Como consecuencia de la homogeneidad e isotropia del espacio tiempo la materia contenida en el universo se modela como un fluido perfecto e isotropico. En tal caso el tensor de energía-momento solo tiene componentes diagonales diferentes de cero :

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$$a' = \frac{\dot{a}}{c}$$

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} - \Lambda g_{00} \longrightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} - \Lambda g_{ij} \longrightarrow 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p(t) - \frac{\Lambda c^2}{3}$$

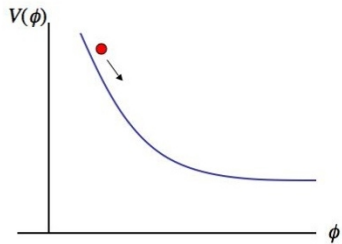
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\begin{aligned}\rho &\rightarrow \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \\ p &\rightarrow p - \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\end{aligned}$$

Una INTERPRETACIÓN muy común...

QUINTA-ESCIENCIA:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \\ p &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\end{aligned}$$



Energía Oscura:
Una forma de energía con
presión negativa:

$$p(t) < -\frac{\rho(t)c^2}{3}.$$

CC → En magnitud presión igual a
densidad.

$$p = -\rho c^2$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{Kc^2}{a^2}.$$

$$\begin{aligned}\rho_c &\equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \\ \Omega &\equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}\end{aligned}$$

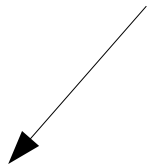
$$1 = \Omega(t) - \frac{Kc^2}{a^2 H^2}$$

EVOLUCIÓN DE LA ENERGÍA

$$T^\mu_{\nu;\mu} \equiv T^\mu_{\nu,\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu_\alpha = T^\mu_{0,\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_0 - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu_\alpha = 0$$

Dada la forma del tensor de energia momento:

$$-\frac{\partial(\rho(t)c^2)}{\partial(ct)} - \Gamma^\mu_{0\mu}\rho(t)c^2 - \Gamma^\alpha_{0\mu}T^\mu_\alpha = 0$$



$$p = p(\rho),$$

$$p = w\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \longrightarrow \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w) = 0 \longrightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}$$

$$w = 0, \quad p = 0, \quad \rho_m(t) = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

$$w = 1/3, \quad p = \frac{\rho c^2}{3}, \quad \rho_r(t) = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$$

$$w = -1 \quad p = -\rho c^2, \quad \rho_v(t) = \rho_{v0}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi G}{3}\rho &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_v) && \boxed{a = (z + 1)^{-1}} \\
&= \frac{8\pi G}{3H_0^2}H_0^2 \left(\rho_{m0}(1+z)^3 + \rho_{r0}(1+z)^4 + \rho_{v0}(1+z)^{3(1+w)} \right) \\
&= H_0^2 \left(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+w)} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{Kc^2}{a_0^2} = H_0^2 (\Omega_0 - 1) \qquad \Omega_0 = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{v0}.$$

$$\boxed{H^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+w)} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 \right)}.$$

$$H^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+w)} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 \right).$$

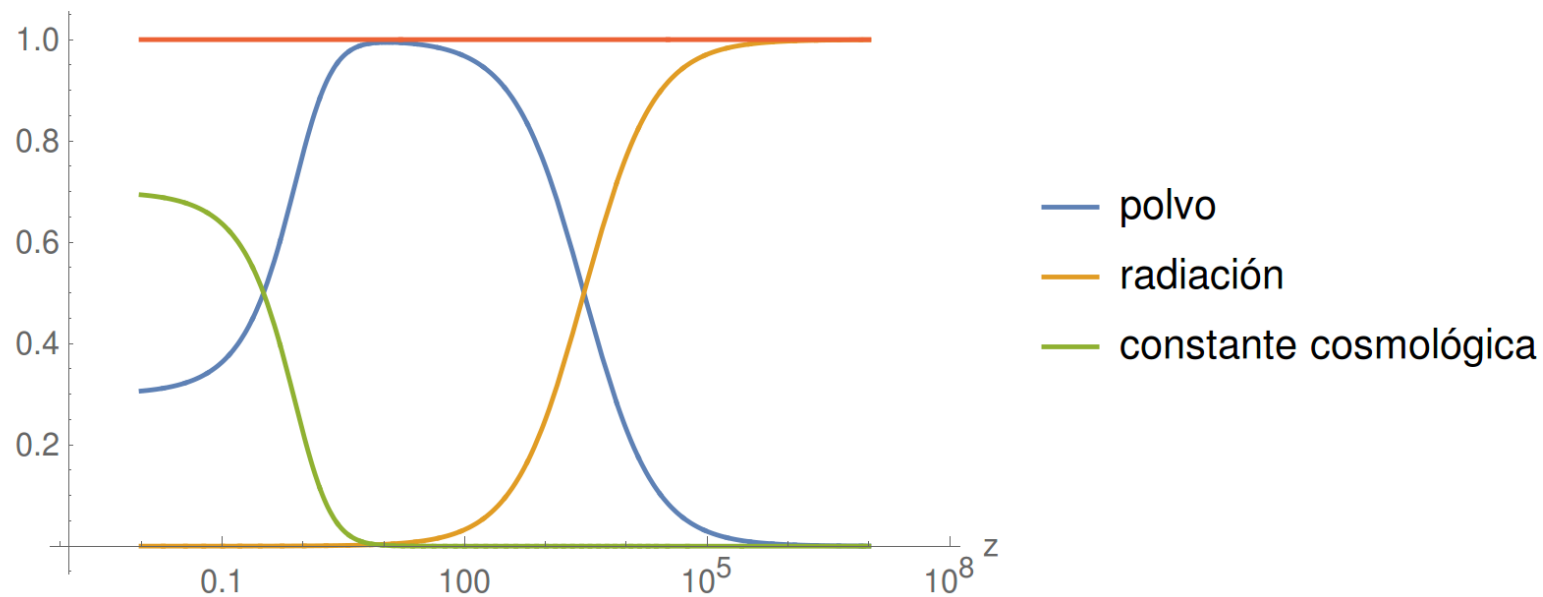
$$H(z) = h(z) \times 100 \frac{km/s}{Mpc}$$

parámetros físicos

$$\omega_i = h^2 \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} = h^2 \Omega_i \quad \omega_K = h^2(1 - \Omega)$$

$$h^2(z) = \left[\omega_{m0}(1+z)^3 + \omega_{r0}(1+z)^4 + \omega_{v0}(1+z)^{3(1+w)} + \omega_{K0}(z+1)^2 \right]$$

Densidad Relativa



Soluciones para un solo fluido

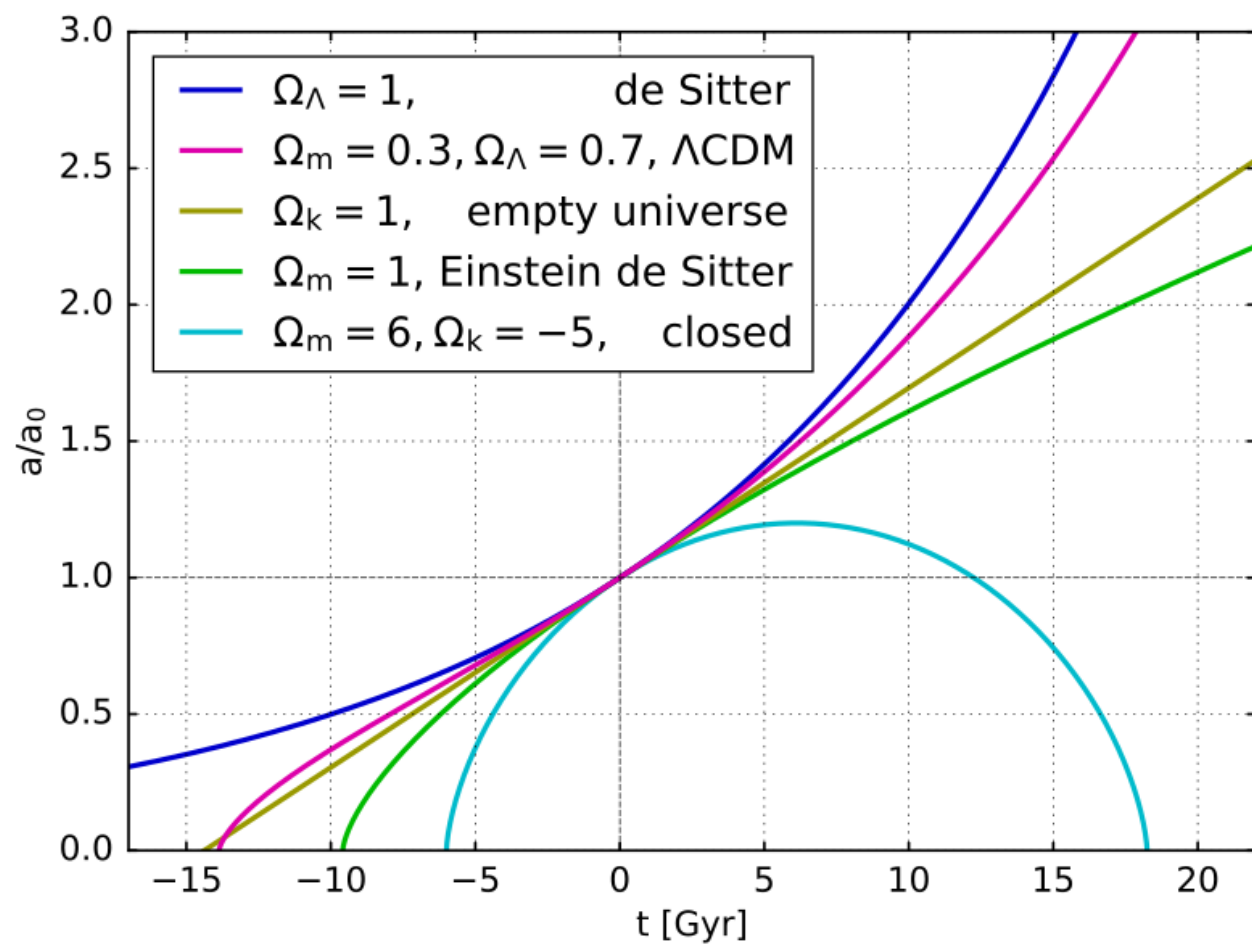
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} a^{-3(1+w)} \longrightarrow \dot{a} \propto a^{-(1+3w)/2} \longrightarrow a^{3(1+w)/2} \propto t \longrightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}.$$

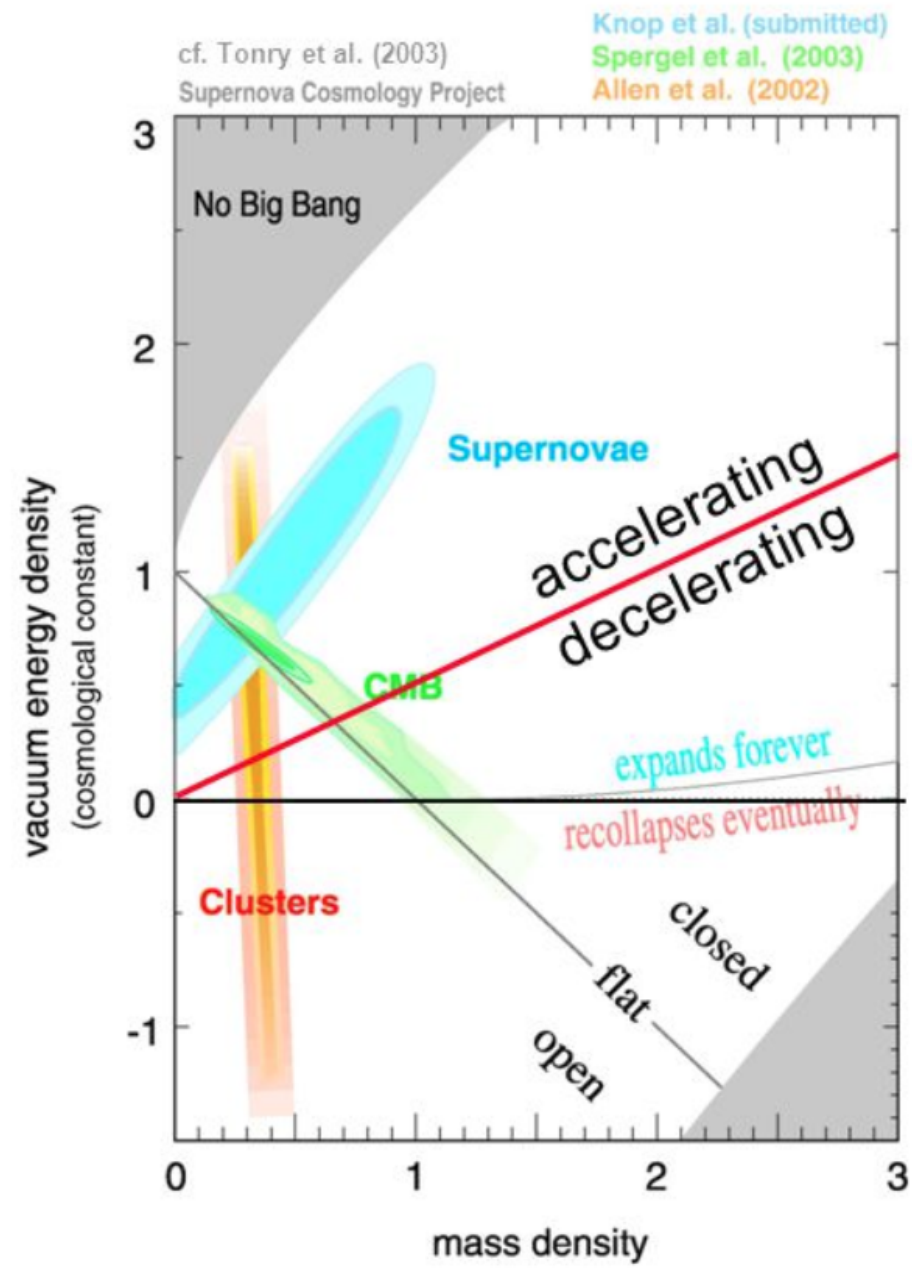
Einstein de Sitter:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} \qquad a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

de Sitter:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Omega_{v0} \qquad a(t) = a_0 \exp(H(t - t_0))$$





HORIZONTES Y DISTANCIAS

$$\eta \equiv \int \frac{cdt}{a(t)}. \quad ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2 + S_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

Geodésicas nulas: $\chi(\eta) = \pm\eta + \text{const}$

La luz que existe en el universo solo pudo haber viajado una distancia finita lo cual implica que el volumen espacial del que hemos recibido señales es finito. La frontera de dicho volumen es el **HORIZONTE DE PARTÍCULAS**:

$$\chi_p(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{cdt}{a} \quad \eta_i = t_i = 0, \longrightarrow \text{singularidad inicial}$$

Eventos en $\chi > \chi_p(\eta)$ no son accesibles a nosotros en $\chi = 0$.

$$R(t) = a(t)\chi_p = a(t) \int_{t_i}^t \frac{cdt}{a(t)}, \longrightarrow \text{radio del universo observable}$$

HORIZONTE DE EVENTOS. Comprende al conjunto de puntos desde los cuales señales enviadas al tiempo t (η) nunca serían recibidas por un observador en el futuro. En coordenadas comoviles dichos puntos serían

$$\chi > \chi_{\text{ev}}(t) = \eta_{\text{max}} - \eta = \int_t^{t_{\text{max}}} \frac{cdt'}{a(t')}$$

$$\chi_s = \int_0^{\chi_s} d\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

$\left[\dot{z} = -H(1+z) \right]$

El tamaño físico (o tamaño propio) del horizonte de eventos sería:

$$R_{\text{ev}}(t) = ca(t) \int_t^{t_{\text{max}}} \frac{dt'}{a(t')}.$$

$$R_{\text{ev}}(t) = ce^{H_{\Lambda}t} \int_t^{\infty} e^{-H_{\Lambda}t'} dt' = cH_{\Lambda}^{-1}$$

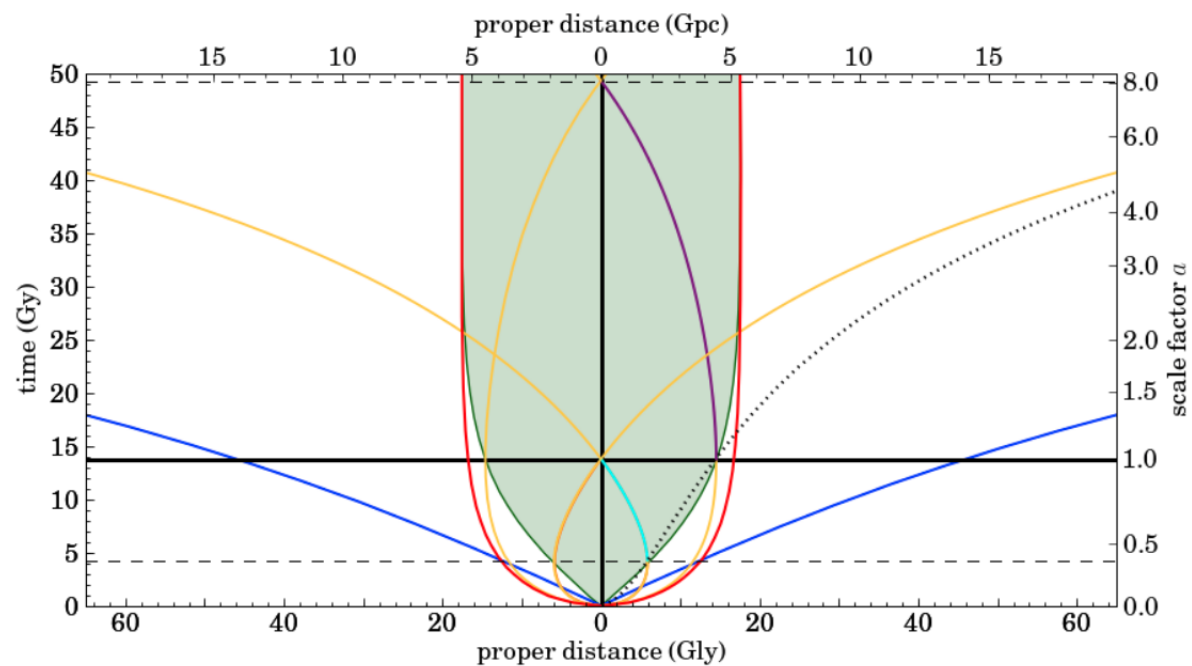
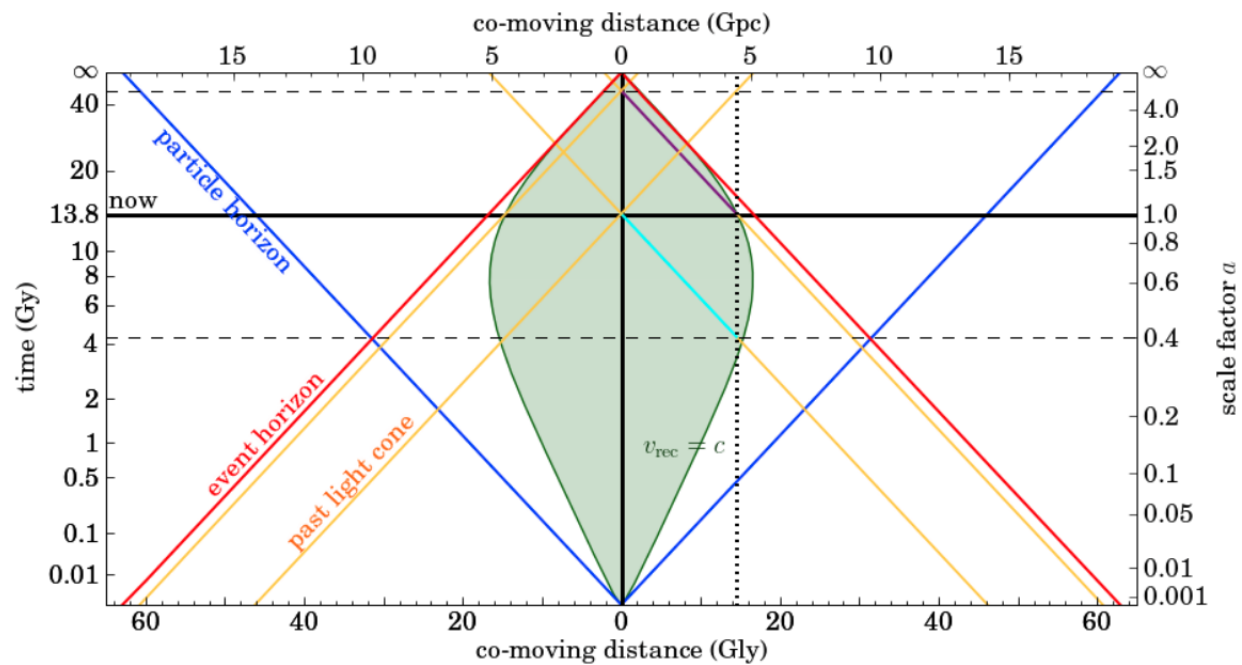
De Sitter

$$R_H = \frac{c}{aH(a)}$$

$$R_{H0} = \frac{c}{H_0} \sim 3000 Mpc$$



Radio de Hubble:
estimación del horizonte
de eventos



DISTANCIA LUMINOSA.

Una de las tareas más ambiciosas de la cosmología observacional es determinar distancias de objetos en el cosmos. En espacio de Minkowski medir distancias esta bien establecido. Si consideramos una fuente de luz con luminosidad absoluta L_s , entonces el flujo de luz que recibimos a una distancia d obedece :

$$\mathcal{F} = \frac{L_s}{4\pi d^2}$$

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi \mathcal{F}}.$$

Sin embargo en un universo en expansion no sabemos cual es la distancia “verdadera”, entonces como si podemos determinar certeramente L_s entonces lo que definimos es la distancia luminosa a partir de lo que sabemos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z, \quad \text{---} \quad L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1}, \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}.$$



$$L_s = L_0(1 + z)^2.$$

De la métrica se puede inferir que la superficie extendida por una señal despues de haber viajado χ_s es:

$$S = 4\pi(a_0 S_K(\chi_s))^2. \quad \mathcal{F} = \frac{L_0}{4\pi(a_0 S_K(\chi_s))^2}.$$

Entonces podemos inferir que la distancia luminosa es :

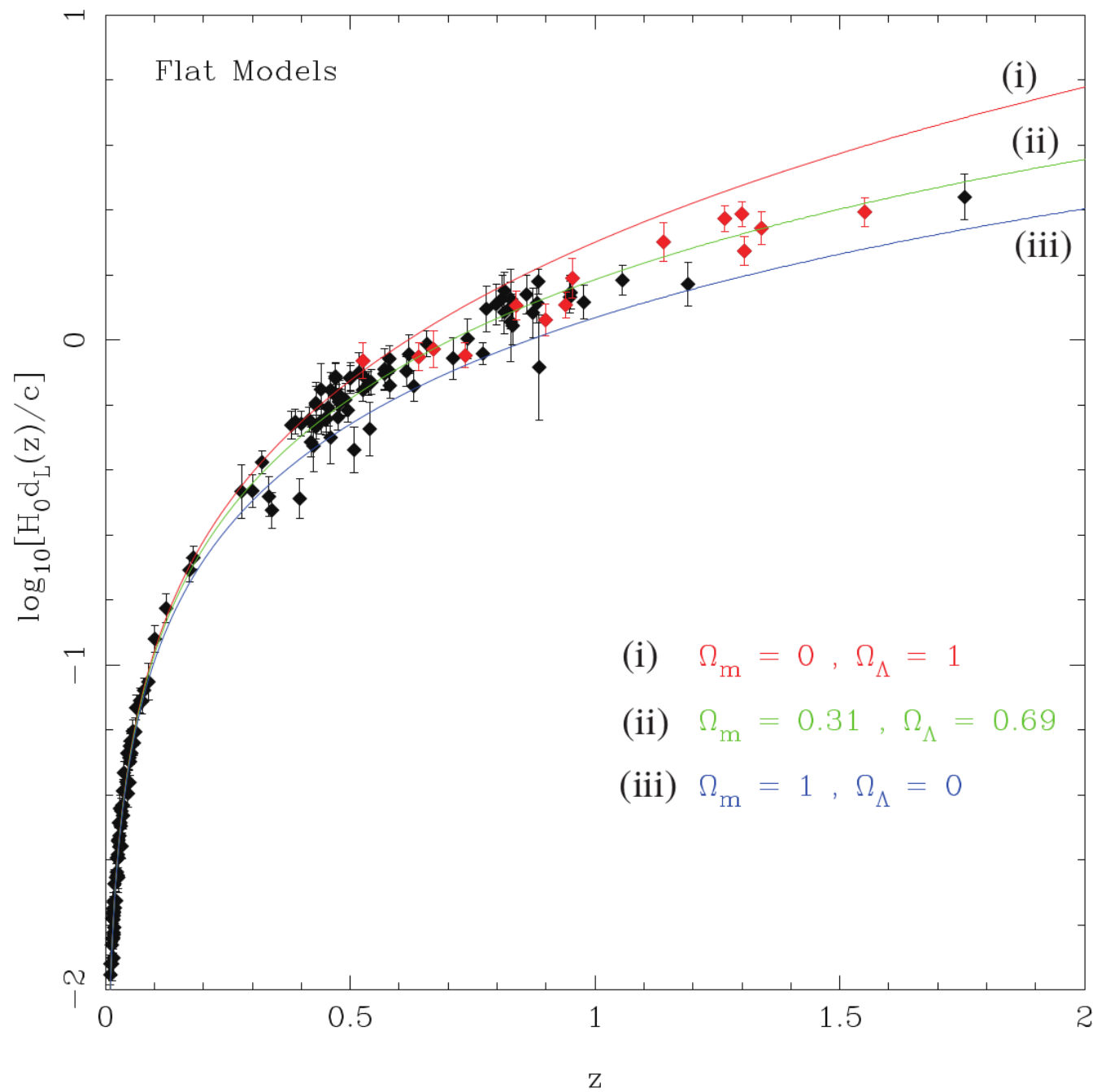
$$d_L = a_0 S_K(\chi_s)(1+z).$$

$$d_L = a_0 \chi_s (1+z).$$

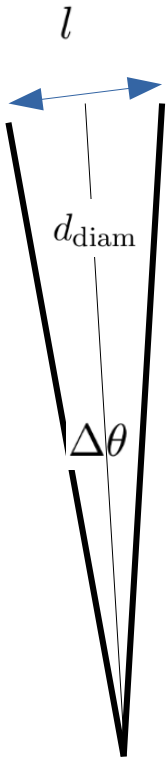
$$\chi_s = \int_0^{\chi_s} d\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

$\left[\dot{z} = -H(1+z) \right]$

$$H(z) = \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{c(1+z)} \right) \right\}^{-1}.$$



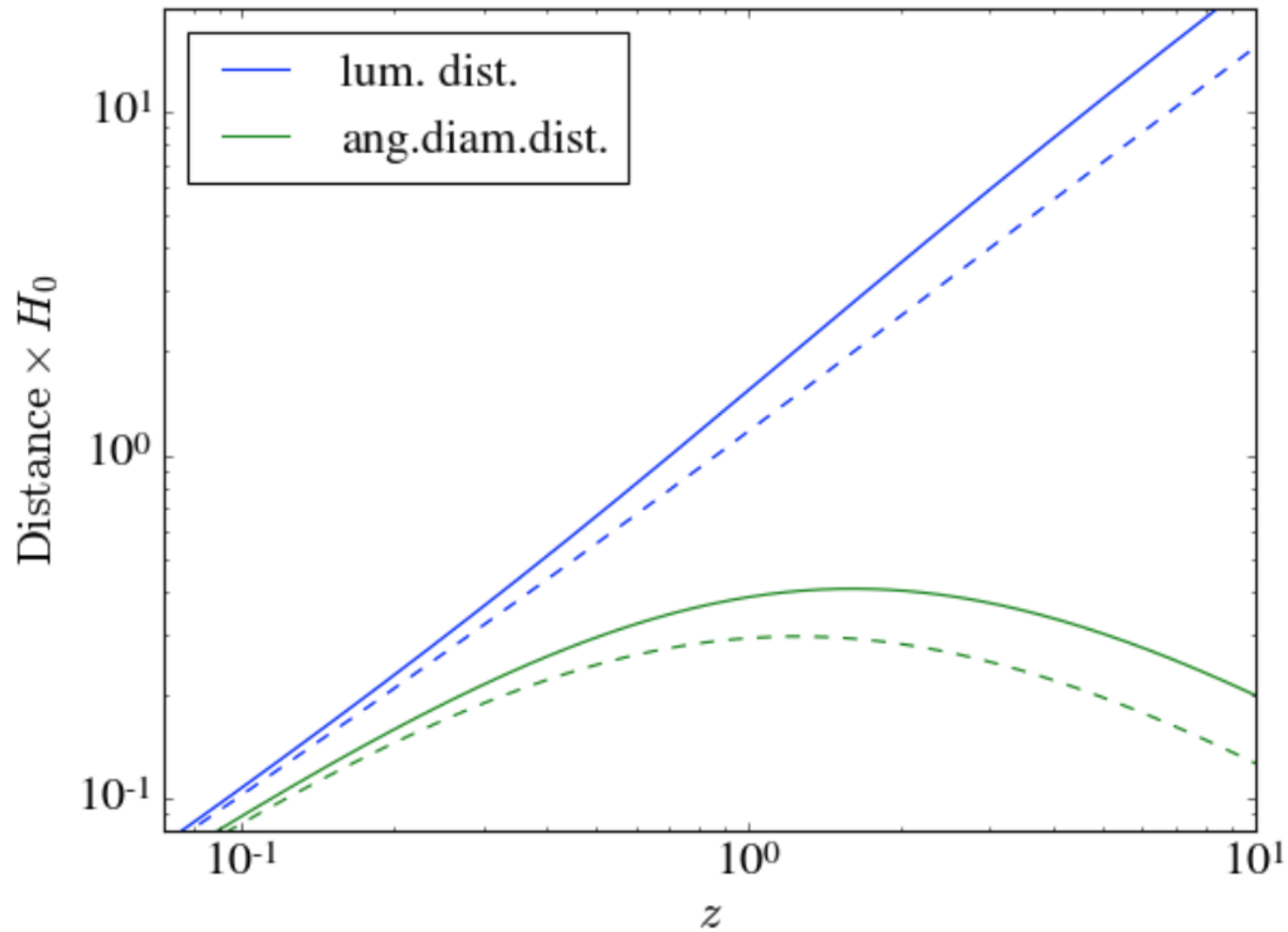
Distancia Diametral Angular



$$d_{\text{diam}} \equiv \frac{l}{\Delta\theta}$$

$$l = \sqrt{|ds^2|} = a(t_{\text{em}})S_K(\chi_{\text{em}})\Delta\theta.$$

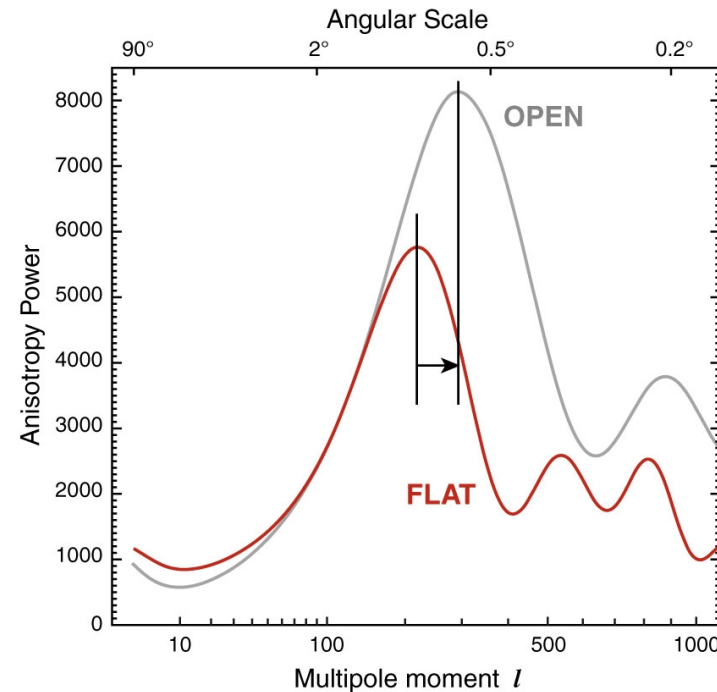
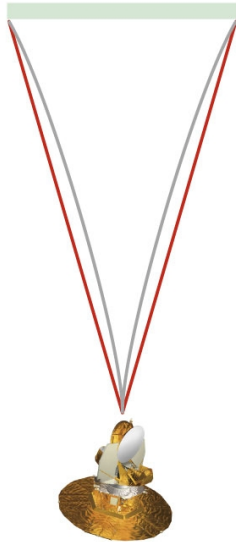
$$d_{\text{diam}} = a(t_{\text{em}})S_K(\chi_{\text{em}}) = a(t_0)(1+z)^{-1}S_K(\chi_{\text{em}}) = d_L(1+z)^{-2}$$



D_A no aumenta para z grandes, por lo tanto, objetos lejanos tienen mayor distancia angular y aparentan estar más cercanos.

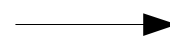
Standard Ruler: primer pico del CMB

Standard Ruler:
1° arc measurement of
dominant energy spike



Para un universo
dominado por materia:

$$S_K(\chi_p) = \frac{2}{a_0 H_0 \Omega_0} \cdot$$



$$a(t_0)(1+z)^{-1} S_K(\chi_{\text{em}})$$

Definición de D_A



$$\Delta\theta_r \simeq \frac{z_r H_0 \Omega_0}{2H(z_r)} \simeq \frac{1}{2} z_r^{-1/2} \Omega_0^{1/2} \simeq 0.87^\circ \Omega_0^{1/2},$$