



Dinámica Inflacionaria en una teoría de gravedad conforme

Rogelio Enrique Pascual Veloz

Contenido



- Resumen
- Objetivos
- Metodología
- Antecedentes y Síntesis de lo trabajado hasta el momento

En este trabajo se estudiará y comparará la dinámica inflacionaria de dos modelos de teorías de gravedad modificada tipo $f(R)$.

El primero es el modelo de Starobinsky y el segundo es un modelo $f(R)$ con invarianza bajo transformaciones conformes.

Resumen

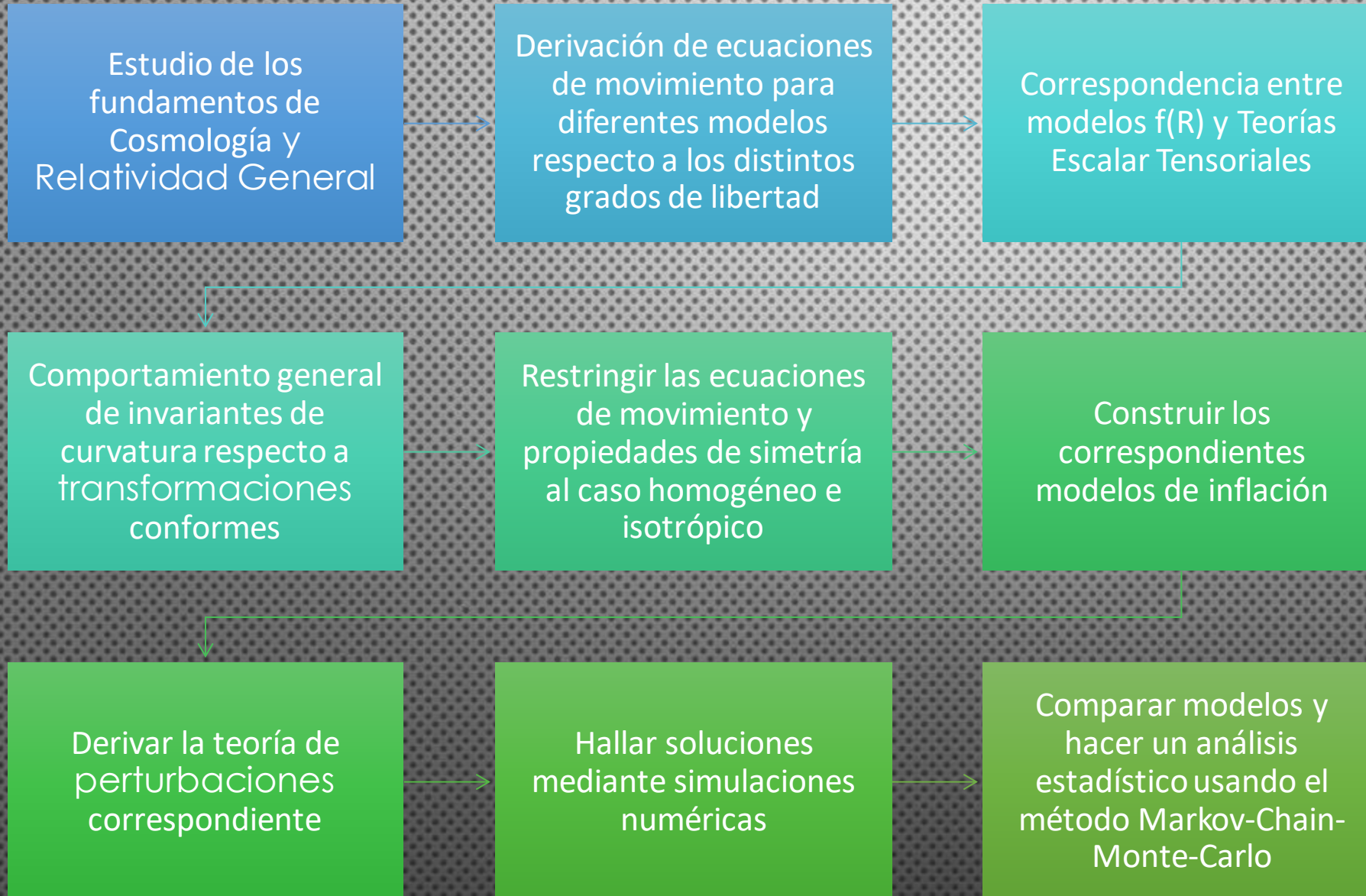
Estudiar la correspondencia entre teorías escalares-tensoriales y teorías tipo $f(R)$ en el marco de Jordan.

Obtener las ecuaciones de movimiento clásicas del modelo de Starobinsky y del modelo $f(R, Ricci)$ con invarianza conforme en el marco de Jordan en el límite homogéneo e isotrópico y a nivel de las perturbaciones.

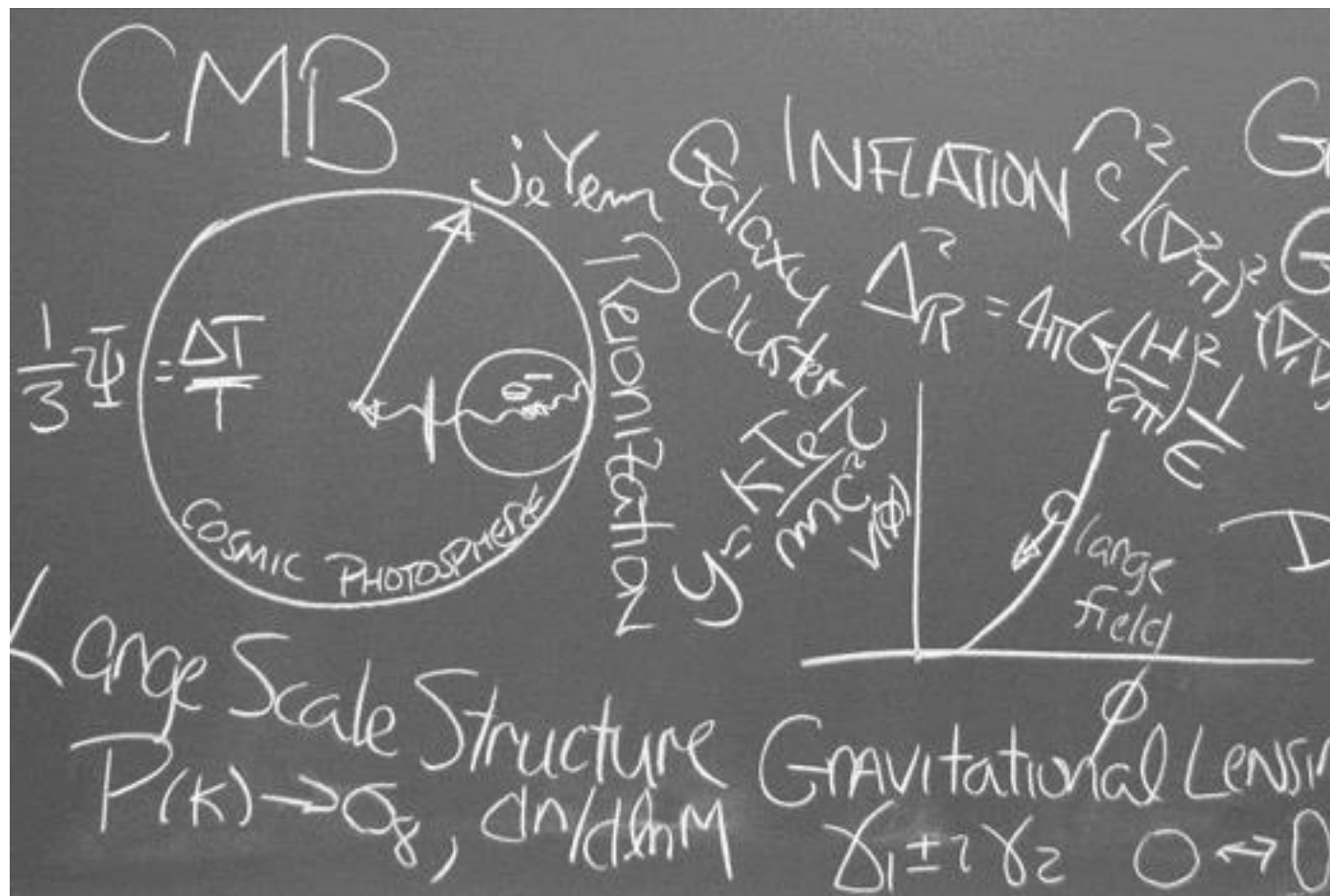
Construir los modelos de Inflación correspondiente determinando los parámetros de "Slow Roll" e imponiéndoles constricciones de acuerdo a los últimos datos del CMB obtenidos por PLANCK 2018.

Comparar las predicciones teóricas con Planck 2018 y realizar pruebas Bayesianas (opcional) para determinar cuál de los dos modelos ajusta mejor los datos observacionales.

Objetivos



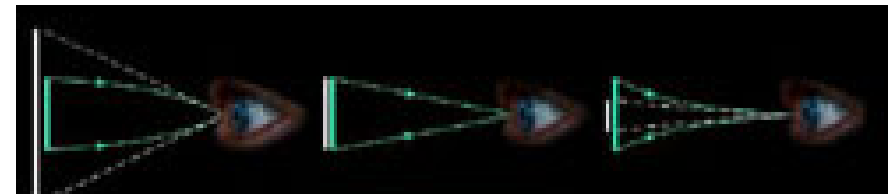
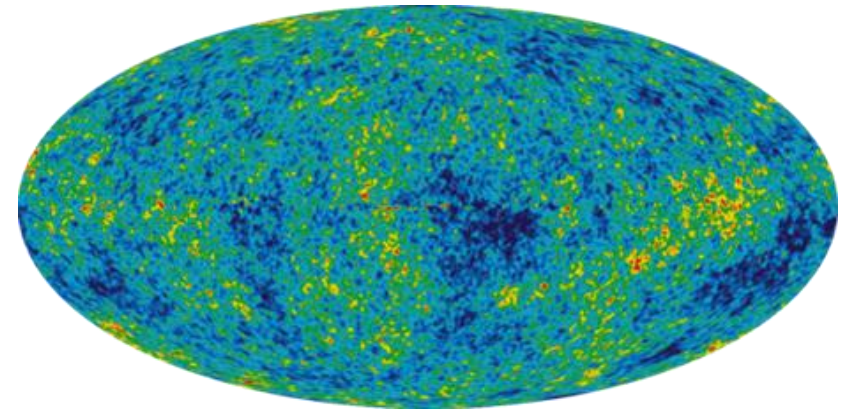
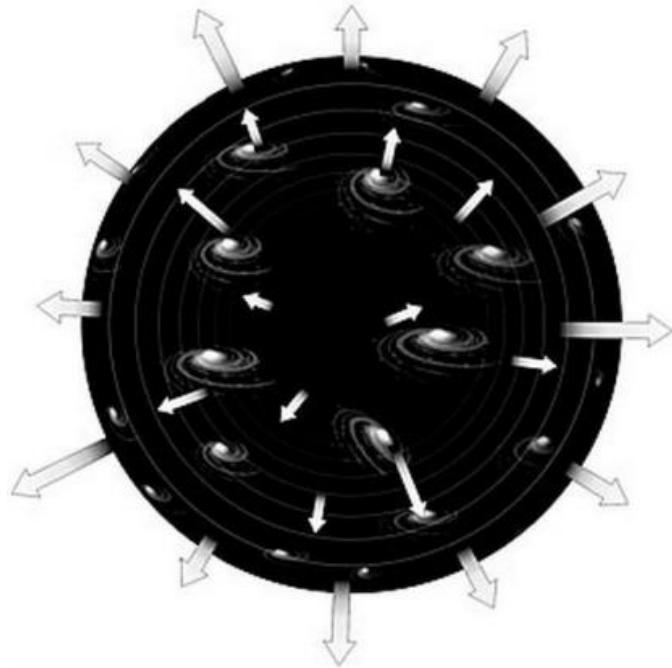
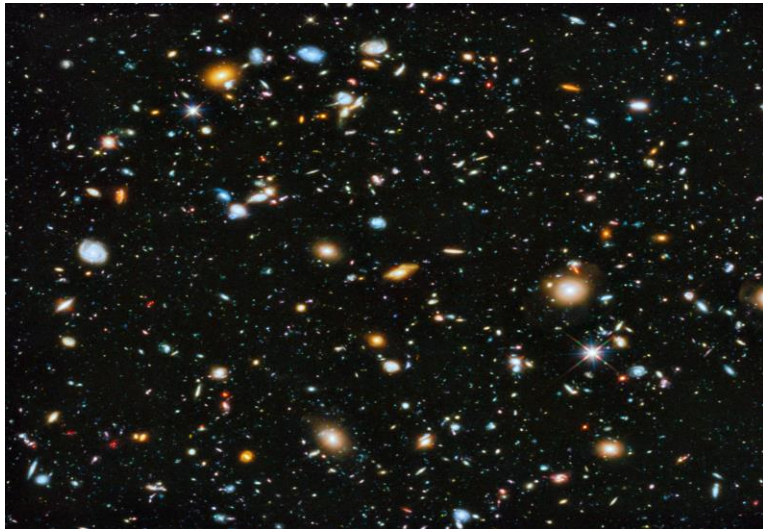
Metodología



Antecedentes y Síntesis de lo trabajado hasta el momento

Principio cosmológico y evidencia observacional

- El universo es homogéneo e isotrópico a gran escala
- El universo se está expandiendo - Recesión de galaxias
- El universo es Altamente plano - Fondo Cósmico de Microondas (CMB)



Métrica y ecuaciones de friedmann

- La métrica que describe un universo homogéneo e isotrópico es la de Friedmann Robertson Walker (FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

- Para un universo plano dicha métrica es:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Las ecuaciones de movimiento (Friedmann) derivadas para un universo plano son:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \qquad \text{Donde } H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G},$$

Parámetro de densidad

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}.$$

Primera ec. De Friedmann en términos del parámetro de densidad

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{0,R}a^{-4} + \Omega_{0,M}a^{-3} + \Omega_{0,k}a^{-2} + \Omega_{0,\Lambda}.$$

Modelo del Big Bang

Antecedentes

PREDICCIONES CORRECTAS

Expansión acelerada del universo

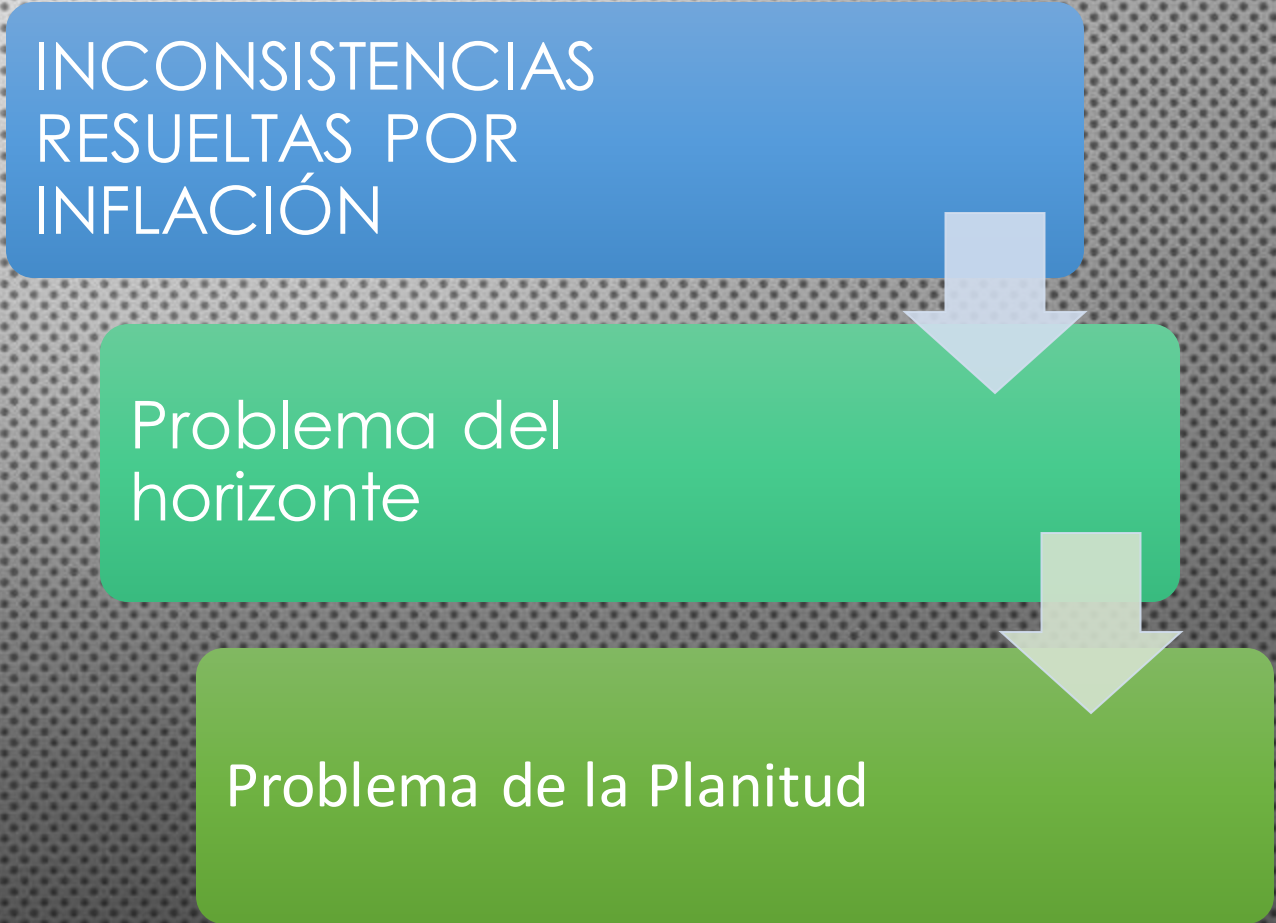
Estructura a gran escala de la distribución de materia

Abundancias del Hidrógeno, Deuterio, Helio y Tritio

Modelo del Big Bang

Antecedentes

INCONSISTENCIAS
RESUELTAS POR
INFLACIÓN



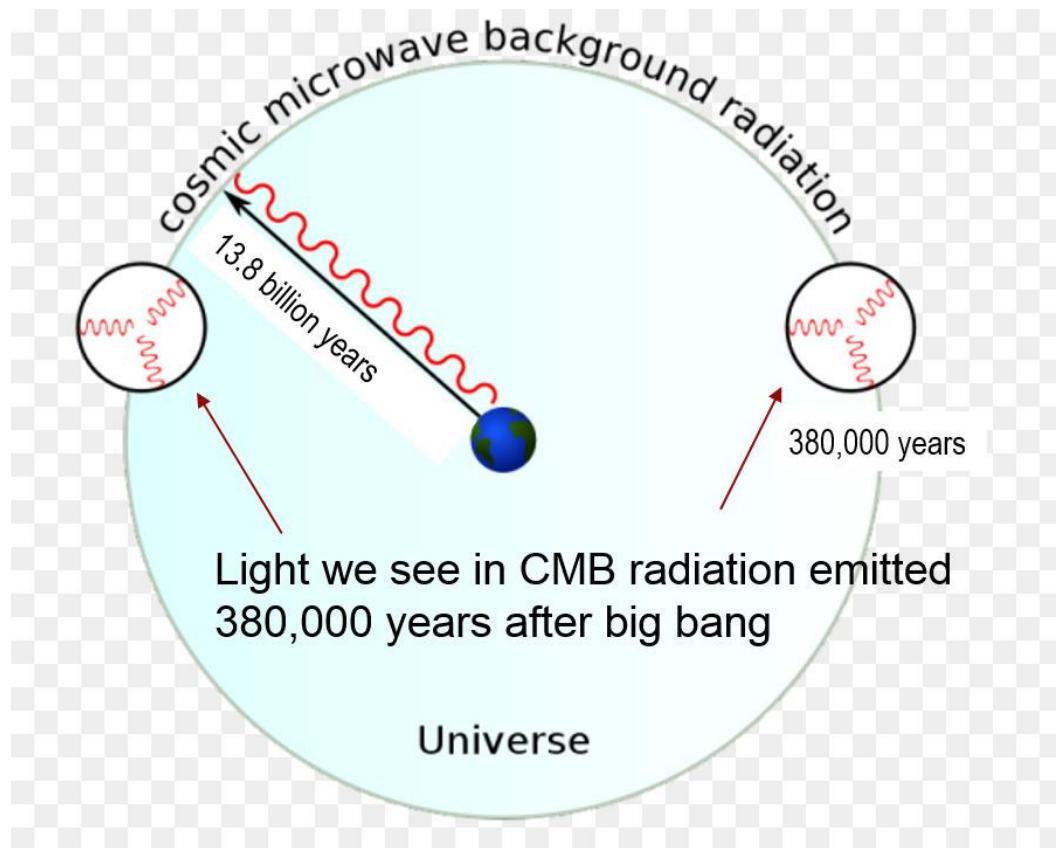
```
graph TD; A[INCONSISTENCIAS RESUELTAS POR INFLACIÓN] --> B[Problema del horizonte]; B --> C[Problema de la Planitud];
```

The diagram consists of three vertically stacked rounded rectangular boxes. The top box is blue and contains the text 'INCONSISTENCIAS RESUELTAS POR INFLACIÓN'. A light blue arrow points from the bottom of this box to the top of the middle box. The middle box is green and contains the text 'Problema del horizonte'. A light green arrow points from the bottom of this box to the top of the bottom box. The bottom box is a darker shade of green and contains the text 'Problema de la Planitud'.

Problema del
horizonte

Problema de la Planitud

Problema del horizonte



- Misma temperatura en el CMB 2.75 K
- Fotones en 2 regiones muy alejadas no pudieron haberse comunicado debido a que tienen velocidad finita y el tiempo del universo no es suficiente para haber podido recorrer la distancia necesaria
- Regiones desconectadas causalmente hoy, debieron estar en contacto térmico en etapas tempranas del universo

Problema de la planitud

De la primera ecuación de Friedmann y el parámetro de densidad se tiene que:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \qquad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}. \qquad 1 - \Omega(a) = \frac{-k}{(aH)^2}$$

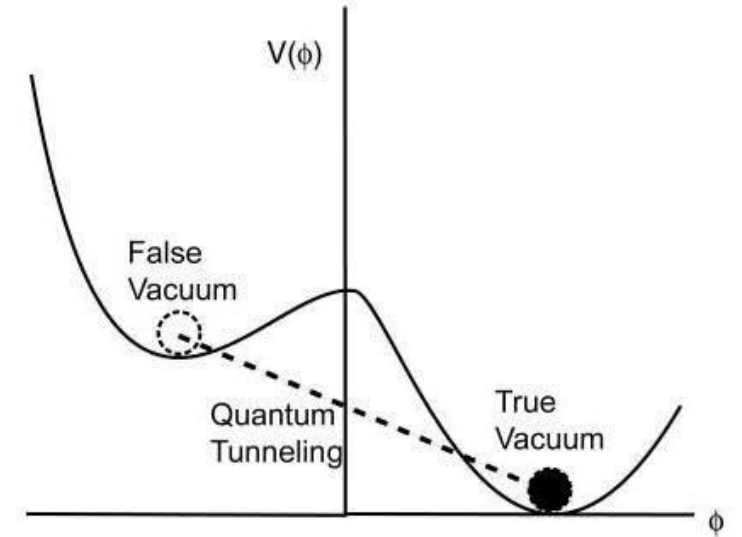
- Para un universo plano $k=0$, de manera que el universo debió ser mucho más plano en sus etapas tempranas, por lo que:

$$|\Omega(a_{\text{BBN}}) - 1| \leq \mathcal{O}(10^{-16}),$$

- Para que el universo evolucionara con tan alta planitud, debieron existir condiciones iniciales de ajuste fino, las cuáles son muy improbables

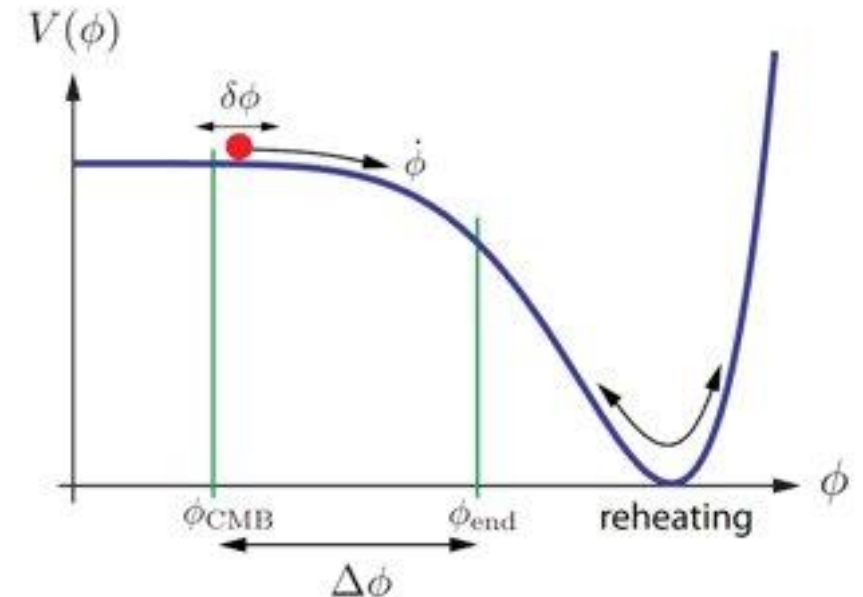
Inflación (ALAN GUTH)

- Expansión exponencial del universo en los primeros instantes
- Generada por un campo escalar denominado Inflatón (Asociado a un grado extra de libertad gravitacional)



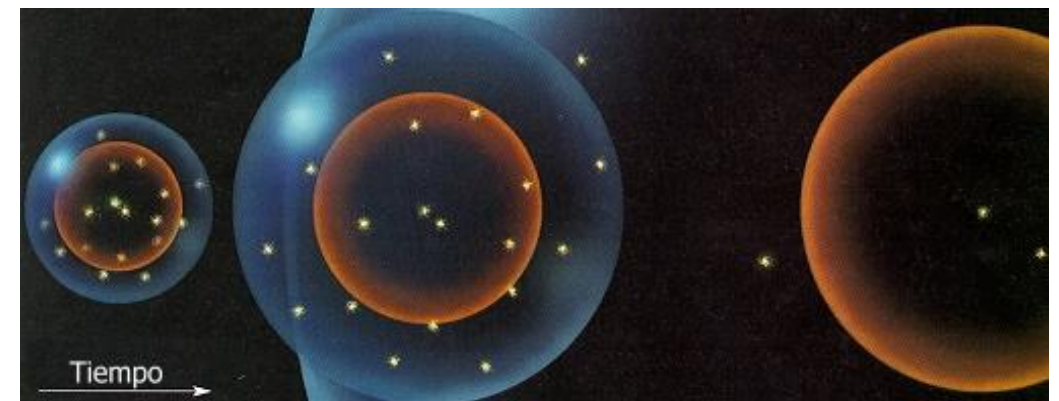
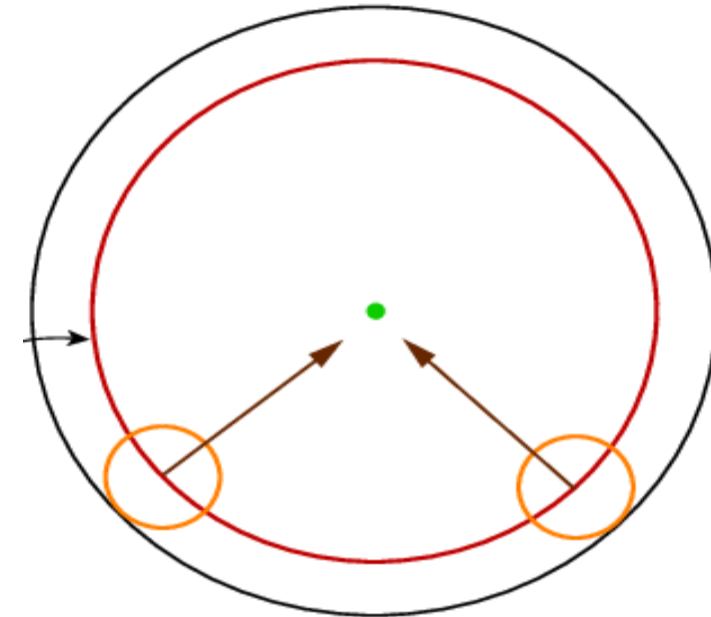
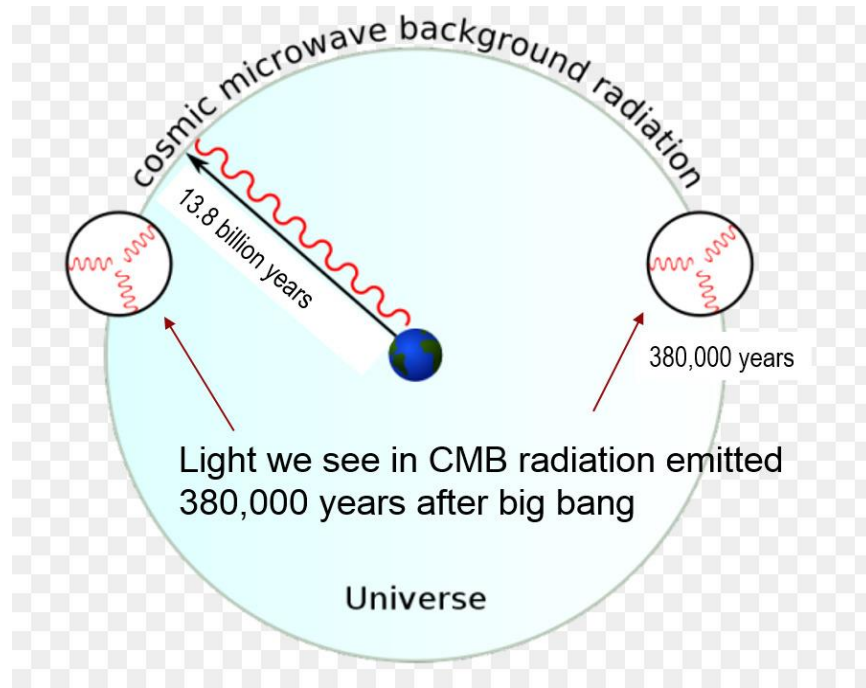
APROXIMACIÓN SLOW ROLL (LINDE)

- SU POTENCIAL HACE QUE EL INFLATÓN EVOLUCIONE MUY LENTAMENTE HACIA SU ESTADO MÍNIMO DE ENERGÍA DONDE OSCILA EN LA ÉPOCA DE RECALENTAMIENTO



CONDICIONES PARA INFLACIÓN

El Radio Comóvil de Hubble debe disminuir



Problema del horizonte resuelto

El Radio Comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ debe disminuir, de tal forma que:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \qquad \ddot{a} > 0$$

Para que se produzca la expansión acelerada, el modelo más sencillo sale de asumir que H es cte durante Inflación y por lo tanto el factor de escala evoluciona exponencialmente

$$\frac{da}{a} = H dt \qquad a(t) = a_f e^{H(t-t_f)}$$

De la segunda ecuación de Friedmann notamos que para que se de la expansión acelerada, es necesario que la presión del fluido sea negativa

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \qquad p < -\frac{\rho}{3}$$

e-foldings: 1 e-folding es cada vez que el universo duplica su tamaño. El problema del Horizonte se resuelve si el campo escalar se mantiene atrapado por al menos 60 e-foldings.

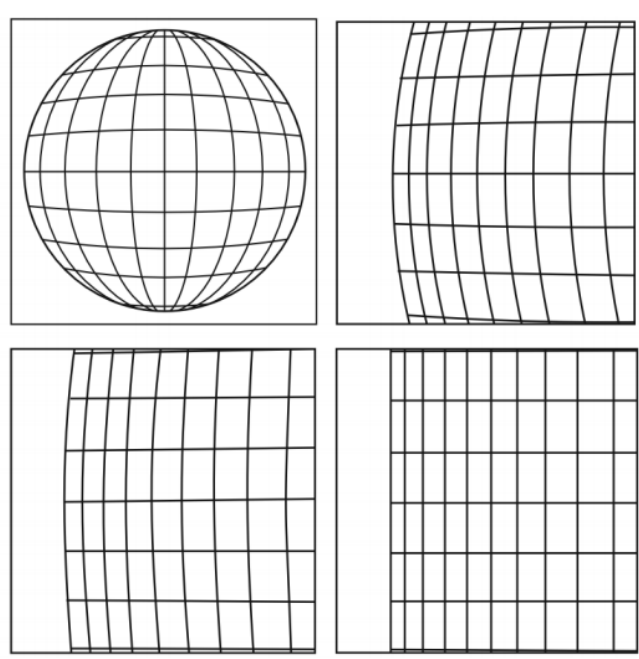
Problema de la planitud resuelto

La ecuación de Friedmann puede tomar la siguiente forma para analizar el problema de la planitud:

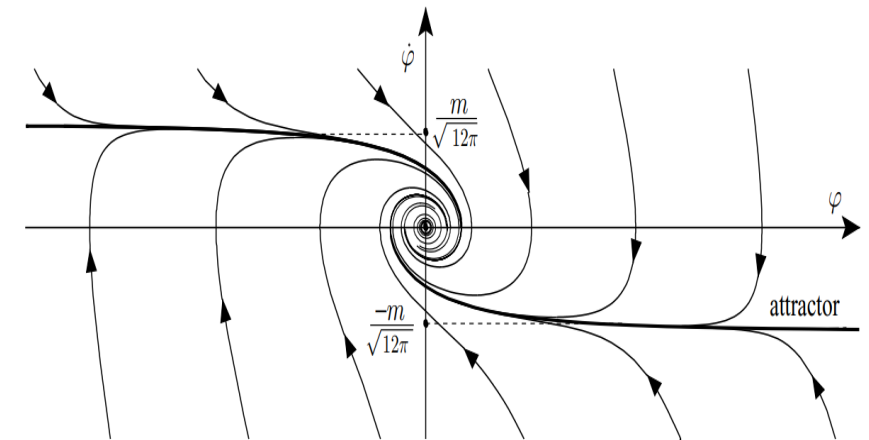
$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{(aH)^2}$$

Al incrementar lo suficiente aH , el lado derecho de la ecuación disminuye drásticamente, siendo prácticamente cero, dando lugar a un universo plano de forma natural.

Otra forma de verlo es pensar que incluso si el universo completo tuviera curvatura, al crecer exponencialmente en la era de inflación, haría que el parche pequeño que vemos (universo observable) fuera localmente plano.



Inflación proporciona soluciones de tipo ATRACTOR



Teoría escalar tensorial de la gravedad

- Acción:

$$S_{ET} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2\Lambda(\phi)]$$

Al introducir la métrica FRW, la ecuación de Klein-Gordon es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega + 3} [\omega' - 2\phi\Lambda' + 4\Lambda]$$

- Variación de la acción respecto al campo escalar:

$$\delta_\phi S_{ET} = R + (\frac{\omega'}{\phi} - \frac{\omega}{\phi^2}) \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \nabla^\mu \nabla_\mu \phi - 2\Lambda' = 0$$

Al introducir la métrica FRW, la ecuación para el campo escalar

$$(\frac{\dot{\phi}}{\phi})^2 [\frac{\omega}{6} + \frac{1}{4}] + \frac{\Lambda}{3\phi} = (H + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}}{\phi})^2$$

- Variación de la acción respecto a la métrica:

$$\delta_{g^{\alpha\beta}} S_{ET} = \phi G_{\alpha\beta} + \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + g_{\alpha\beta} \Lambda - \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi + g_{\alpha\beta} \square \phi - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi = 0$$

Transformaciones conformes

- Una transformación conforme es una transformación de escala localizada
- Matemáticamente todos los marcos conformes son equivalentes
- La elección de marco pareciera afectar las predicciones físicas de una teoría gravitacional clásica o de un modelo de inflación cosmológico.

Transformación conforme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$$

El símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} - (f_{\nu}\delta_{\lambda}^{\mu} + f_{\lambda}\delta_{\nu}^{\mu} - \tilde{f}^{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda})$$

El D'Alambertiano

$$\square f = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_{\mu} (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_{\nu} f)$$

El escalar de Ricci se transforma como

$$R = \Omega^2 (\tilde{R} + 6\square f - 6\tilde{g}^{\mu\nu} f_{\nu})$$

Donde

$$f = \ln \Omega$$

$$f_{\nu} = \frac{\partial_{\nu} \Omega}{\Omega} = \partial_{\nu} f$$

Pasando al marco de Einstein

- Una teoría escalar-tensorial en el marco de Jordan puede formularse en el marco de Einstein mediante una transformación conforme.
- Se busca que la acción quede de la forma de la acción de Einstein-Hilbert.
- La ventaja de utilizar el marco de Einstein es que conocemos bien la acción EH y es mucho más fácil de resolver.

Acción ET

$$S_{ET} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2\Lambda(\phi) \right]$$

Acción EH

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} (R + L_M)$$

Marco de Jordan	Marco de Einstein
Partículas de prueba siguen las geodésicas descritas por la métrica.	Partículas de prueba NO siguen las geodésicas descritas por la métrica.
El campo escalar se acopla NO mínimamente a la métrica.	El campo escalar no se acopla a la métrica a nivel del Lagrangiano.
El campo escalar NO se acopla directamente a la materia.	El campo escalar se acopla a nivel del Lagrangiano con campos de materia.
El Tensor de Energía Momento de materia se conserva covariantemente.	El Tensor de Energía Momento de materia NO se conserva covariantemente.

Modelos de gravedad modificada tipo $f(R)$

- Resultan de generalizar la acción de Einstein-Hilbert tras añadir invariantes escalares o al considerar una función del escalar de Ricci.
- Son teorías efectivas de gravedad cuántica a escalas de energía cercanas a la escala de Planck.
- Son teorías de la gravitación de orden cuatro, cuyo marco conforme es el marco de Jordan.

Acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M$$

Ecuaciones de movimiento

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - f_{R;\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}$$

Transformación conforme

$$\bar{g}_{\mu\nu} = f_R g_{\mu\nu}$$

Ecuaciones de movimiento en el marco conforme

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \frac{\kappa}{2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - \bar{g}_{\mu\nu} V(\phi) \right) + \frac{\kappa}{2} \bar{T}_{\mu\nu}$$

Nuevo grado de libertad

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{\kappa}} \ln f_R$$

Modelo de Starobinsky

Es el modelo más sencillo de las teorías $f(R)$, ya que su acción es la extensión más simple de la acción de Einstein-Hilbert al añadirse un término cuadrático de curvatura R^2 .

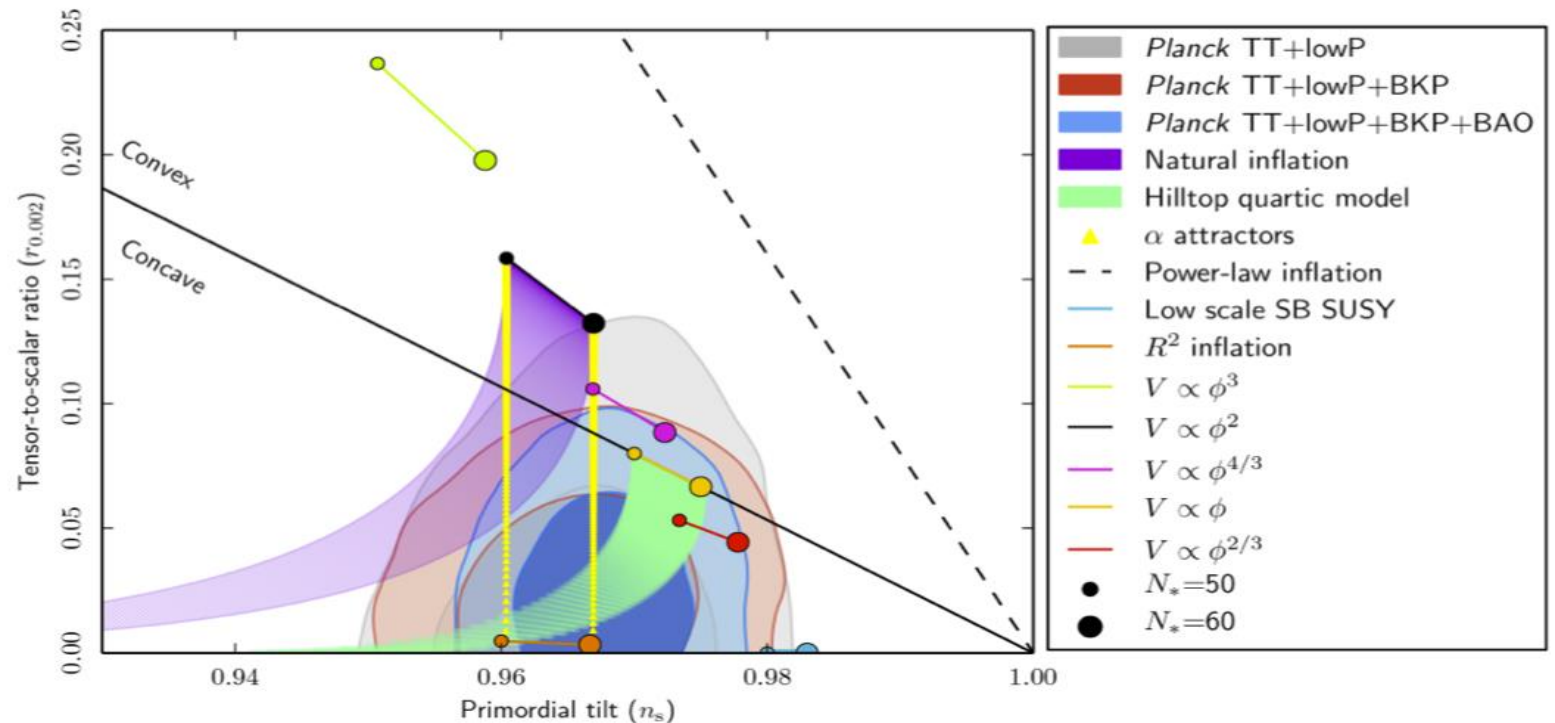
La acción de este modelo es la siguiente:

$$S_{Star} = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{6m^2} R^2 \right)$$

Donde $M_{pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ es la masa reducida de Planck

Inflación predice el índice espectral n_s y el Tensor to Scalar ratio r

Está en la región de mejor confianza, se encuentra en el centro del pico de likelihood.



Modelo tipo $f(R)$ con invarianza de escala

- Es un modelo con un término cuadrático del escalar de Ricci con un campo escalar acoplado **NO** mínimamente a la métrica

Potencial efectivo

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\xi}{6}\phi^2 R + \frac{\lambda}{4}\phi^4,$$

Acción

$$I = \int \left[\frac{\alpha}{36} R^2 + \frac{\xi}{6} \phi^2 R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right] \sqrt{-g} d^4x,$$

Máximo y mínimo local

$$\phi = 0, \quad \phi_0^2 = \frac{\xi R}{3\lambda},$$

Invariante ante las transformaciones activas

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(\ell x), \quad \bar{\phi}(x) = \ell \phi(\ell x),$$

Transformación rígida de Weyl

$$g'_{\mu\nu}(x) = L^2 g_{\mu\nu}(x), \quad \phi'(x) = L^{-1} \phi(x),$$

Perspectivas y conclusiones

- Una motivación para estudiar modelos de Inflación derivados de teorías de gravedad modificada es que el campo escalar corresponde a un grado de libertad de la métrica el cual surge a altas energías.
- En dicho régimen, los términos efectivos asociados a alguna teoría de gravedad cuántica se vuelven relevantes y modifican a la acción EH.
- Aún no hay consenso sobre el marco conforme "físico", por lo que se busca estudiar bajo qué condiciones la física del campo escalar es equivalente en el marco de Jordan y en el marco de Einstein.

Referencias

- ARTÍCULOS

- Pedro G. Ferreira, Christopher T. Hill, Johannes Noller and Graham G. Ross. Scale independent R^2 inflation. 2019
- Philip D. Mannheim. Making the Case for Conformal Gravity. 2011
- A. Avilez, C. Skordis. Cosmological constraints on Brans-Dicke theory. 2014
- Abril Suárez, Ana Avilez, David Tamayo, Tula Bernal, Jorge L. Cervantes-Cota. Dynamical Systems Analysis in Post-Friedmann Parametrizations of Modified Theories of Gravity. 2019.
- Yermek Aldabergenov, Ryotaro Ishikawa, Sergei V. Ketov and Sergey I. Kruglov. Beyond Starobinsky inflation. 2018
- Mark Trodden¹ and Sean M. Carroll. TASI Lectures: Introduction to Cosmology. 2008
- Jérôme Martin. Cosmic Inflation: Trick or Treat?. Institut d'Astrophysique de Paris 2019
- Antonio de Felice. $F(R)$ Theories. Faculty of Science, Tokyo University of Science 2010
- Rinaldi. Inflation and reheating in theories with spontaneous scale invariance symmetry breaking. University of Trento. 2016
- Tambalo. Inflation and reheating in scale-invariant scalar-tensor gravity. 2017

- LIBROS

- Valerio Faraoni. Cosmology In Scalar-Tensor Gravity. 2004
- V. Mukhanov. Physical Foundations of Cosmology. Cambridge 2005.
- Scot Dodelson. Modern Cosmology. Fermi National Accelerator Laboratory University of Chicago 2003
- Andrew Liddle. An Introduction to Modern Cosmology. University of Sussex UK 2003
- Fujii Y., Maeda K. The scalar tensor theory of gravitation. 2004



Gracias