Minicurso: Cosmología

Gilberto Aguilar Pérez

Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Abril 2021

Contenido

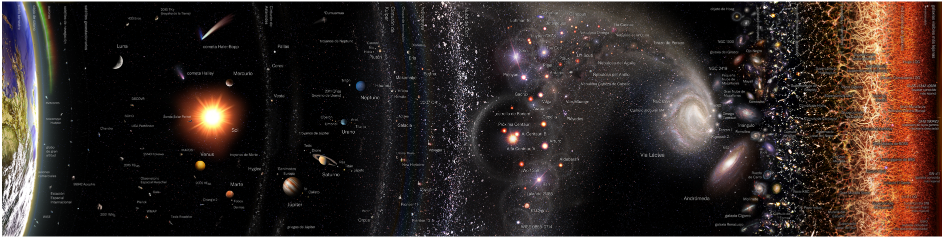

Figure: Esquema del universo observable

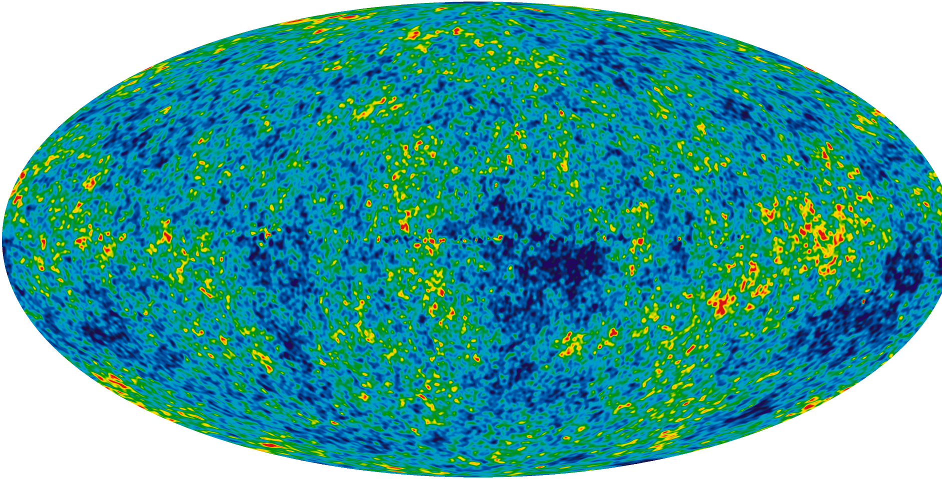

Figure: La radiación cósmica de fondo

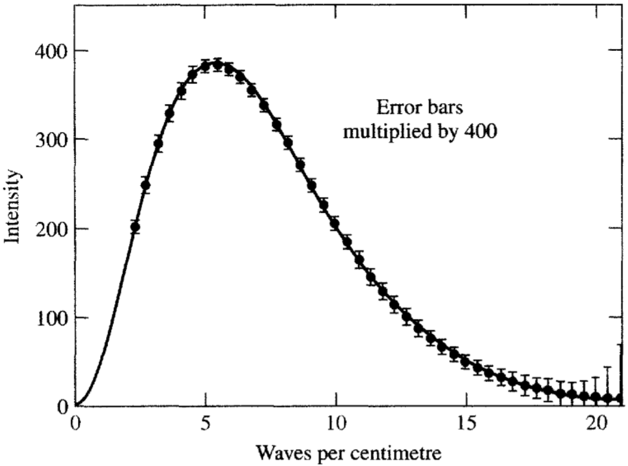

Figure 2.4 The cosmic microwave background spectrum as measured by the FIRAS experiment on the COBE satellite. The error bars are so small that they have been multiplied by 400 to make them visible on this plot, and the best-fit black-body spectrum at $T = 2.725$ Kelvin, shown by the line, is an excellent fit.

Figure:

¿Qué es cosmología?

¿Qué es el universo físico?

- Conjunto máximo de objetos físicos que están causalmente conectados de forma local unos con otros y a otras regiones del espaciotiempo que sean accesibles a nosotros por observaciones astronómicas.

La cosmología es el estudio científico de la estructura a gran escala de la región observable del universo.

Trata de:

- la distribución y movimiento de la radiación y galaxias, cúmulos de galaxias, fuentes de radio, objetos cuasi estelares y otros objetos astronómicos observables a gran distancia. En respuesta a obervaciones astronómicas, **contempla la naturaleza e historia del universo en expansión**.
- Al estudiar la evolución de la materia en el pasado, debemos considerar procesos físicos en el universo muy temprano (el Hot Big Bang, HBB) e incluso contemplar el origen del universo mismo.
- Se provee de un análisis basado en observaciones de lo que se encuentra en regiones distantes y cómo llegó a ser así.
- Incluso provee información importante sobre el ambiente en el que la vida podría existir en el universo.

Existen diversas ramas de la cosmología

Cosmografía

Descripción de lo que hay en el universo y cómo está distribuido.

Cosmología observacional

Ha llevado a descubrimientos inesperados.

Cosmología física

Busca explicar las observaciones, con el fin de entender los procesos que ocurren y cómo estos han contribuido a que se formen las estructuras observadas.

Los siguientes puntos son responsabilidad de la cosmología física:

- Dinámica de la expansión del universo a gran escala.
- A nivel de estructura y evolución de objetos de gran escala.
- Se consideran microprocesos en la época de HBB.
- Es usual tomar un modelo de fondo del universo de Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker.
- Para estudiar inhomogeneidades se considera una versión perturbada de dicho modelo.

Cosmología de partículas

Se utiliza la mecánica cuántica y la física de partículas para estudiar la evolución del universo muy temprano en el esquema del HBB.

- Se utiliza también un fondo de FLRW.
- Se estudia el concepto de inflación.

Cosmología cuántica

Intenta describir el origen del espaciotiempo.

Cosmología relativista

Se enfoca en la geometría del espaciotiempo del universo y sus consecuencias para la cosmología observacional y física.

En resumen...

Los ingredientes clave de la cosmología son:

- Un espaciotiempo.
- Una descripción de materia y radiación.
- Una familia de observadores fundamentales definidos de forma única.
- Un conjunto de relaciones observacionales.

Por lo tanto, cosmología es el estudio del universo como un todo: su historia, evolución, composición y dinámica.

El principio cosmológico

Homogeneidad e isotropía

- A escalas mucho mayores a $10\ Mpc$ vemos no sólo una densidad promedio uniforme, sino uniformidad en otras propiedades.
- Cuando vemos muy lejos, también vemos atrás en el tiempo. Vemos evolución y esta evolución es la misma en todas direcciones.
- A gran escala el universo es **homogéneo**.
- A escalas mucho mayores a $10\ Mpc$ el universo además parece **isótropo**.
- Una tercera propiedad: uniformidad en su expansión: Ley de Hubble.

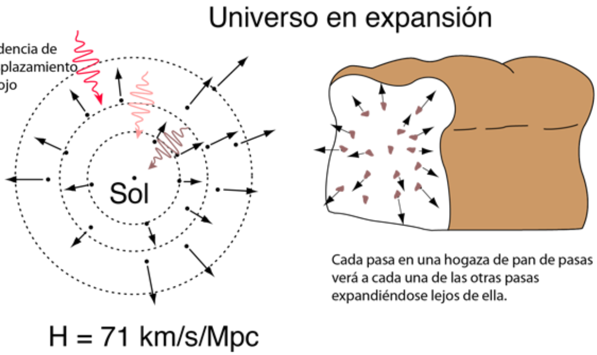

Figure: Todas las distancias relativas incrementan a una razón proporcional a sus magnitudes.

La ley de Hubble establece que

$$v = Hd.$$

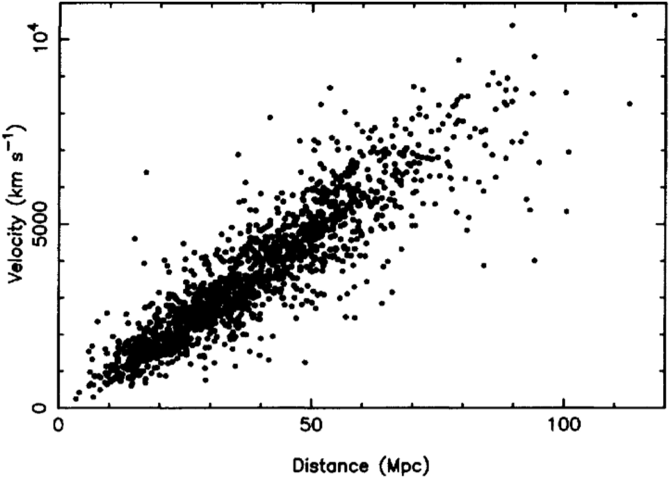

Figure 2.5 A plot of velocity versus estimated distance for a set of 1355 galaxies. A straight-line relation implies Hubble's law. The considerable scatter is due to observational uncertainties and random galaxy motions, but the best-fit line accurately gives Hubble's law. [The x-axis scale assumes a particular value of H_0.]

Modelos del universo: el principio cosmológico

Debemos hacer algunas suposiciones sobre las regiones que no podemos ver.

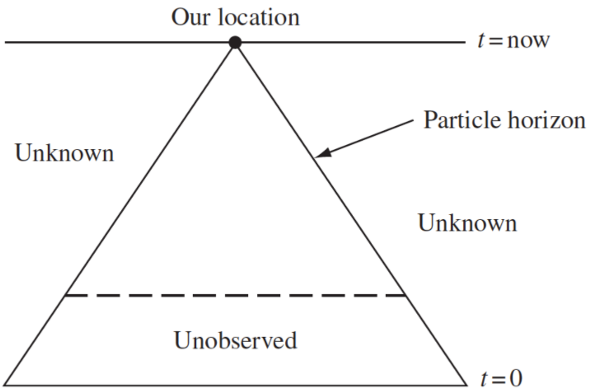

Figure: Esquema de regiones desconocidas y no observadas.

Las ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

- Pueden ser simplificadas al considerar el principio cosmológico.
- Tomamos escalas suficientemente grandes.
- No podemos probar el principio cosmológico por observaciones directas a dos puntos en el universo separados a escalas significativas cosmológicamente.

La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

El principio cosmológico establece que el universo es homogéneo e isotrópico.

Un modelo del universo que es bastante aceptado es el de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), el cual funciona si suponemos que el universo es homogéneo e isótrópico. La métrica de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right]$$

- $a(t)$ factor de escala
- $k = -1, 0, 1$ Topología del espacio (hiperbólico, plano, esférico)

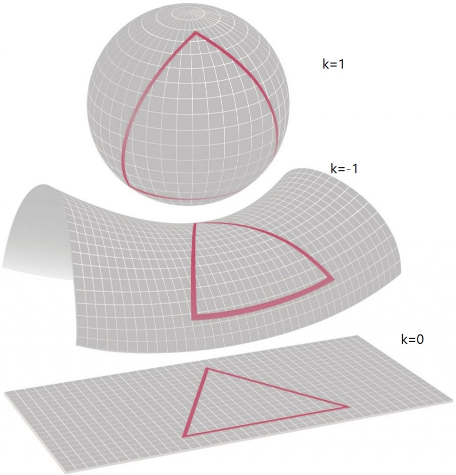

Figure: Las tres posibilidades que contiene la métrica de FRW

La dinámica del universo

Al considerar la métrica de FLRW y el tensor de energía-momento de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

donde ρ es la densidad de energía y p la densidad de presión del fluido, obtenemos las ecuaciones que gobiernan la dinámica del universo:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = \kappa\rho$$

y

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \Lambda = \kappa p.$$

donde $a = a(t)$ es el factor de escala; ρ y p denotan las densidades de energía y presión totales de todas las especies presentes en el universo a una época dada y Λ es la constante cosmológica.

La ecuación de continuidad

A cualquier época, la razón de expansión del universo está dada por el parámetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{1}$$

El tensor de energía-momento es conservado en virtud de las identidades de Bianchi, llevando a una ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0.$$

Para cerrar el sistema, consideremos $p = \omega\rho$.

Reescribamos las ecuaciones de campo usando el parámetro de Hubble:

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = \kappa\rho \tag{2}$$

y

$$-2\dot{H} - 3H^2 - \frac{k}{a^2} + \Lambda = \kappa p. \tag{3}$$

Dividiendo la ecuación (2) por $3H^2$,

$$1 = \frac{\kappa\rho}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{a^2 H^2}. \tag{4}$$

El parámetro de densidad

Para una razón de expansión dada, existe una densidad crítica ρ_c que lleva a un universo plano $k = 0$. Dicha densidad crítica está dada como:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa} \tag{5}$$

Se define el parámetro de densidad

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \tag{6}$$

Así, los parámetros de densidad para el total de contenido en el universo $\Omega = \Omega_m + \Omega_r$ y la constante cosmológica están dados por:

$$\Omega = \frac{\kappa\rho}{3H^2} \tag{7}$$

y

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{8}$$

Reescribimos así la ecuación (4):

$$\Omega + \Omega_\Lambda - \frac{k}{(aH)^2} = 1 \rightarrow \Omega_{total} - 1 = \frac{k}{(aH)^2}. \tag{9}$$

La distribución de materia claramente determina la geometría espacial del universo, es decir

$$\Omega_{total} > 1 \quad o \quad \rho > \rho_c \rightarrow k = +1,$$

$$\Omega_{total} = 1 \quad o \quad \rho = \rho_c \rightarrow k = 0,$$

$$\Omega_{total} < 1 \quad o \quad \rho < \rho_c \rightarrow k = -1.$$

Soluciones cosmológicas

Asumimos que la curvatura espacial es $k = 0$ y despreciamos la constante cosmológica, $\Lambda = 0$:

- $p = 0$ polvo, $\rho = \frac{\rho_0}{a(t)^3}$. $a(t) \propto t^{2/3}$.
- $p = \frac{1}{3}\rho$ radiación, $\rho = \frac{\rho_0}{a(t)^4}$. $a(t) \propto t^{1/2}$.
- $p = -\rho$ energía del vacío, $\rho = \frac{\Lambda}{\kappa}$. $a(t) \propto \exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t)$.

Una muy breve historia del universo

Basado en una variedad de observaciones, la evolución del universo se puede reconstruir de manera precisa:

- Actualmente vivimos en un universo dominado por materia $(\omega = 0)$ y hay fuerte evidencia de una constante cosmológica positiva $(\Lambda > 0)$.
- En algún momento en el pasado, el universo estaba dominado por radiación.
- El inicio a menudo lo asociamos con el Big Bang.
- Muy posiblemente el universo atravesó un periodo de expansión acelerada: inflación.

El modelo estándar de cosmología se puede ver como la sucesión de las siguientes eras dominantes:

- Inflación → radiación → materia → constante cosmológica.

Un buen modelo cosmológico debe ser capaz de reproducir este patrón.

Reescribamos la ecuación de Friedmann nuevamente considerando que el universo está conformado por materia, radiación y constante cosmológica:

$$H^2 = H_0^2(\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4}) \tag{10}$$

sin embargo, lo que podemos medir es el corrimiento al rojo z, que está relacionado con el factor de escala mediante

$$a = \frac{a_0}{1+z} \tag{11}$$

donde $a_0 = 1$ es el factor de escala medido en el tiempo actual. Sustituyendo:

$$H^2 = H_0^2[\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4] \tag{12}$$

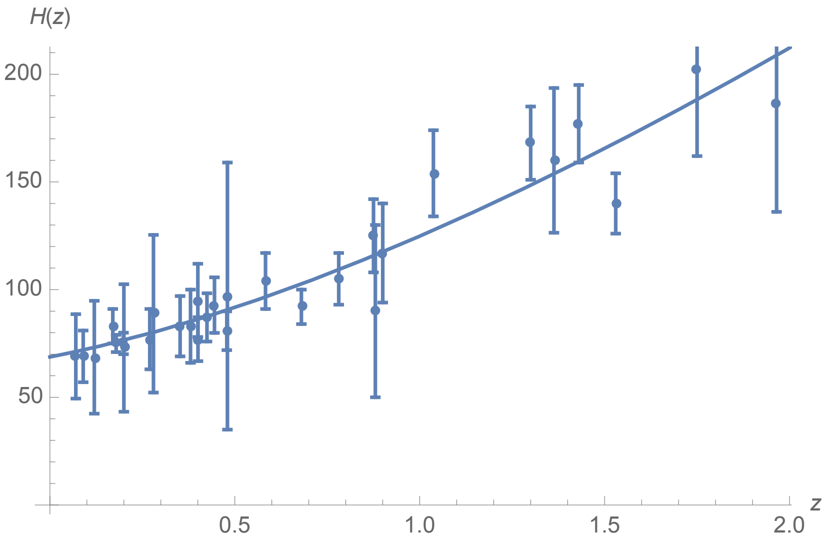

Figure: Ajuste observacional.

Parámetro	valor	error (σ)
Ω_m	0.328187	0.0546112
Ω_Λ	0.671812	0.0546112
H_0	68.7365	1.2

Table: Parámetros ajustados y sus errores.

La ecuación de aceleración

Al combinar las ecuaciones dinámicas para un universo FLRW se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p). \tag{13}$$

Para un universo con expansión acelerada:

$$\ddot{a} > 0$$

$$\rho + 3p < 0$$

y para un fluido barotrópico:

$$\omega < -1/3.$$

El universo de Einstein

Consideremos

- Un universo estático, $a(t)$ es constante (a_0), por lo que $\dot{a} = \ddot{a} = 0$.
- Las ecuaciones de campo se vuelven:

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{\kappa\rho}{3}$$

$$\frac{k}{a_0^2} = -\kappa p.$$

- Para que la densidad de energía sea positiva al día de hoy se tiene que cumplir que $k = 1$.

El universo de Einstein

- Einstein corrigió esto en 1917 al introducir un término constante e invariante de Lorentz: $\Lambda g_{\mu\nu}$.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{14}$$

- Einstein ajustó Λ para obtener una solución estática llamada **Universo de Einstein**.
- En el caso estático:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa} = -\rho_0,$$

es la densidad de energía del vacío.

Evolución incluyendo curvatura

- Nos concentraremos en las propiedades cualitativas de las soluciones. Asumimos que el universo está dominado por materia no relativista: $p = 0$ y $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$.
- Ya vimos que para $k = 0$, $a \propto t^{2/3}$. El universo se expandirá por siempre y a tiempos tardíos se frenará.
- Pregunta: ¿Es posible que la expansión del universo se detenga? Es decir, ¿Para qué condiciones $\dot{H} = 0$.
- Veamos la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2}.$$

- Si $k < 0$ esto no es posible ya que ambos términos en el lado derecho serán positivos.
- A tiempos tardíos, $a \propto t$. **Expansión libre**.

Evolución incluyendo curvatura

- Si $k > 0$, H si puede ser cero, ya que los dos términos eventualmente se anularán. En tal universo la expansión llegará a su fin tras un tiempo finito. Como la atracción gravitacional persiste, el recolapso del universo parece inevitable. **Big Crunch**.

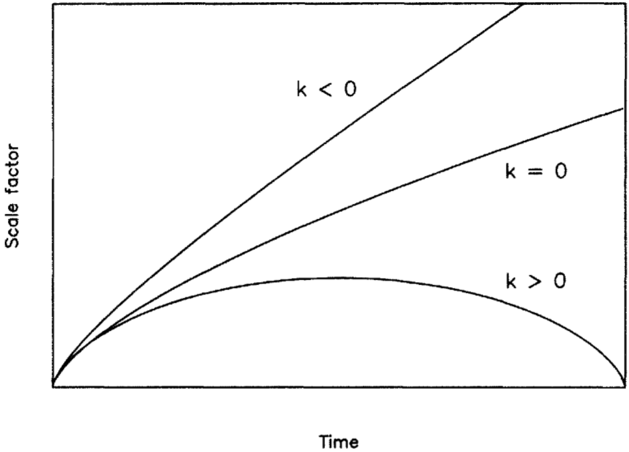

Figure 5.3 Three possible evolutions for the Universe, corresponding to the different signs of k. The middle line corresponds to the $k = 0$ case where the expansion rate approaches zero in the infinite future. During the early phases of the expansion the lines are very close and so observationally it can be difficult to distinguish which path the actual Universe will follow.

Figure: Distintos modelos

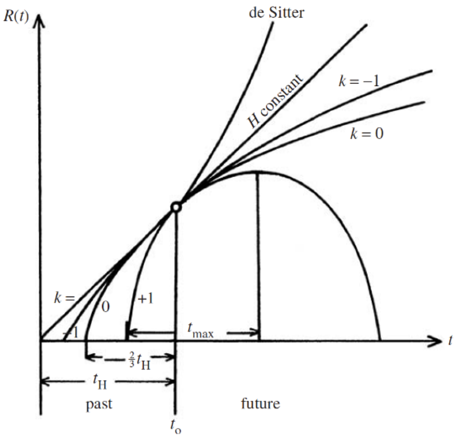

Figure 4.1 Time dependence of the cosmic scale $R(t)$ in various scenarios, all of which correspond to the same constant slope $H = H_0$ at the present time t_0. $k = +1$: a closed universe with a total lifetime $2t_{\max}$. It started more recently than a flat universe would have. $k = 0$: a flat universe which started $\frac{2}{3}t_H$ ago. $k = -1$: an open universe which started at a time $\frac{2}{3}t_H < t < t_H$ before the present time. de Sitter: an exponential (inflationary) scenario corresponding to a large cosmological constant. This is also called the Lemaître cosmology.

Figure: Distintos modelos.

Para el caso $k > 0$ y $p = 0$ tal que $\rho = \rho_0/a^3$, se puede obtener la solución paramétrica

$$a(\theta) = \frac{\kappa\rho_0}{6k}(1-\cos\theta), \tag{15}$$

$$t(\theta) = \frac{\kappa\rho_0}{6k^{3/2}}(\theta-\sin\theta). \tag{16}$$

Algunos problemas del modelo ΛCDM

- **Problema de la planitud**. Regresemos a la ecuación

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2}.$$

En el presente (Ω_0) el parámetro no es muy distinto a 1, lo que implica que a épocas tempranas el valor debió ser muy cercano a 1. Tales condiciones iniciales tan finamente ajustadas son muy improbables.

- **Problema del horizonte** La distancia comóvil sobre la cual pueden ocurrir interacciones causales antes de que se libere la radiación cósmica de fondo es considerablemente menor que la distancia comóvil a la que la radiación viaja después de desacoplarse. No se puede explicar por qué la temperatura observada en diferentes regiones es tan similar por lo que la homogeneidad debe formar parte de las condiciones iniciales.

Algunos problemas del modelo ΛCDM

- **Homogeneidad e isotropía** El problema del horizonte dice que la homogeneidad e isotropía deben ser parte de las condiciones iniciales, pero al considerar escalas menores, sabemos que el universo no es homogeneo e isótropo. ¿Podemos desarrollar una teoría sobre el origen de las inhomogeneidades? ¿o debemos pasarlo también al territorio de las condiciones iniciales?

La constante cosmológica

- Al formular RG, Einstein pensaba que el universo era estático, pero su teoría no lo permitía. Con el fin de establecer un universo estático, propuso un cambio en las ecuaciones: la introducción de la constante cosmológica.
- Aunque la motivación original de Einstein ha desaparecido, permanece como uno de los elementos más importantes y enigmáticos de la cosmología.
- Λ puede ser positiva o negativa. Hoy en día es considerada en el contexto de universos con geometría plana $k = 0$.
- Su efecto se ve mejor en la ecuación de aceleración:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{17}$$

- Es útil describirla como fluido con densidad de energía ρ_Λ y presión p_Λ. De la ecuación de Friedmann:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa} \rightarrow H^2 = \frac{\kappa}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \tag{18}$$

- Por otro lado, consideremos la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho_\Lambda} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0 \rightarrow p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \tag{19}$$

- Tiene un efecto de presión negativa. Mientras el universo se expande, se realiza trabajo sobre el fluido de constante cosmológica.
- Su interpretación física: densidad de energía del vacío.
- Problema de la constante cosmológica.

Referencias

- G. R. Ellis, R. Maartens, Relativistic Cosmology, Cambridge University Press, 2012.
- J. N. Islam, Introduction to Mathematical Cosmology, Cambridge University Press, 2001.
- M. Roos, Introduction to Cosmology, John Wiley and sons, 2003.
- A. Liddle, An introduction to modern cosmology, John Wiley and sons, 2003.
- A. Liddle, D. H. Lyth, Cosmological inflation and large-scale structure, Cambridge University Press, 2000.
- S. Weinberg, Cosmology, Oxford University Press, 2008.
- C. G. Boehmer and N. Chan, doi:10.1142/9781786341044_0004 [arXiv:1409.5585 [gr-qc]].

Gracias por su atención =D